6. PROBABILITÀ

6.1 Calcolo combinatorio

Per come sarà definita, per riuscire a calcolare la probabilità di un evento dobbiamo essere in grado di contare i casi favorevoli e quelli possibili. Riusciamo davvero a "contare"?
Il calcolo combinatorio ci aiuterà in questo.
La maggior parte dei problemi di calcolo combinatorio sono riconducibili al seguente: quante "parole" (anche prive di significato) di k caratteri si possono costruire con un alfabeto di n simboli distinti? La risposta dipende dalle due caratteristiche del problema in esame:

- È importante l'*ordine* dei caratteri delle parole che si vogliono contare?
- Sono consentite *ripetizioni* dei caratteri, ovvero, uno stesso simbolo può comparire più di una volta nella parola?

Familiarizziamo: Si vuole preparare una colonna sonora per una presentazione multimediale: si è deciso di assemblare tre pezzi di musica classica in successione. Il primo brano sarà scelto fra Primavera (P), Estate (E), Autunno (A), Inverno (I), di Vivaldi, il secondo fra le ultime tre sinfonie di Mozart (mi bemolle (m), sol minore (s), do maggiore (d)) e l'ultimo tra l'ottava (8) o la nona (9) sinfonia di Beethoven. Quante colonne sonore si possono ottenere?

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Principio fondamentale del calcolo combinatorio
Se un oggetto è univocamente determinato da una sequenza di n scelte successive, tali che vi siano k_1 possibilità per la prima scelta, k_2 per la seconda,.., k_n per l'n-esima scelta, il numero totale di oggetti che si possono formare è dato dal prodotto:

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$$

DISPOSIZIONI E PERMUTAZIONI
Vogliamo costruire modelli generali di riferimento per risolvere problemi che si possono assimilare al conteggio di "parole" ordinate.

Definizione Dati n oggetti distinti si chiama *disposizione semplice* degli n oggetti in k posti, con $k \leq n$, ogni sequenza di k oggetti scelti tra quelli assegnati con il vincolo di non ripetere gli oggetti. Il numero di tali disposizioni è indicato con $D_{n,k}$ e vale

$$D_{n,k} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Definizione Una disposizione semplice di n oggetti in n posti è chiamata *permutazione* di n oggetti distinti. Il numero complessivo di permutazioni di n oggetti si indica con P_n e vale

$$P_n = n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Esempi

1) Ad una corsa di cavalli ci sono 15 cavalli in gara. Quante classifiche possibili di podio si possono formare?
2) Un'urna contiene 10 palline numerata da 1 a 10, Se ne estraggono successivamente 4 senza reimbussolamento. Quante diverse estrazioni sono possibili tenendo conto dell'ordine dell'estrazione?
3) In quanti modi possibili 6 persone possono essere disposte in fila indiana?
4) Quante sono le possibili funzioni biiettive $f: A \longrightarrow A$, essendo $A = \{1,2,3,4\}$?

Definizione Dati n oggetti distinti si chiama *disposizione con ripetizione* degli n oggetti in k posti, ogni sequenza di k oggetti scelti tra quelli assegnati, ammettendo che sia possibile ripetere gli oggetti. Il numero di tali disposizioni è indicato con $D^*{}_{n,k}$ e vale

$$D^*{}_{n,k} = n^k$$

Definizione Si chiama *permutazione con ripetizione* ogni permutazione di n oggetti non tutti distinti tra loro. Dati n oggetti distinti di cui a_1 uguali tra loro, a_2 uguali tra loro e distinti dai precedenti,…, a_k uguali tra loro e distinti da tutti i precedenti, con $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, il numero delle permutazioni distinte di questi n oggetti è:

$$\frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}$$

Esempi

5) Un numero di telefono di cellulare di 10 cifre inizia 347. Quanti numeri di telefono di questo tipo ci possono essere?
6) Dati gli insiemi $A\{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3,4,5\}$ quante funzioni $f: A \longrightarrow B$ è possibile definire?
7) Quanti sono gli anagrammi della parola “matematica”?
8) In quanti modi diversi una colonna della schedina può essere riempita con 4 segni 1, 6 segni X e 3 segni 2?

COMBINAZIONI

Vogliamo costruire modelli generali di riferimento, per risolvere problemi che si possono assimilare al conteggio di “parole” NON ordinate.

Definizione Dato un insieme di n elementi, si chiama *combinazione semplice* degli n elementi di classe k ogni sottoinsieme dell’insieme dato avente k elementi. Il numero complessivo di combinazioni di n oggetti di classe k viene indicato con il simbolo $C_{n,k}$ e vale

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Esempi

9) Quanti sono i possibili terni che si possono giocare al gioco del lotto?
10) Una grossa azienda deve inviare 2 dei suoi 8 ispettori a controllare una filiale lontana. In quanti modi possibili il capo dell’ufficio può determinare la delegazione dei 2 ispettori?