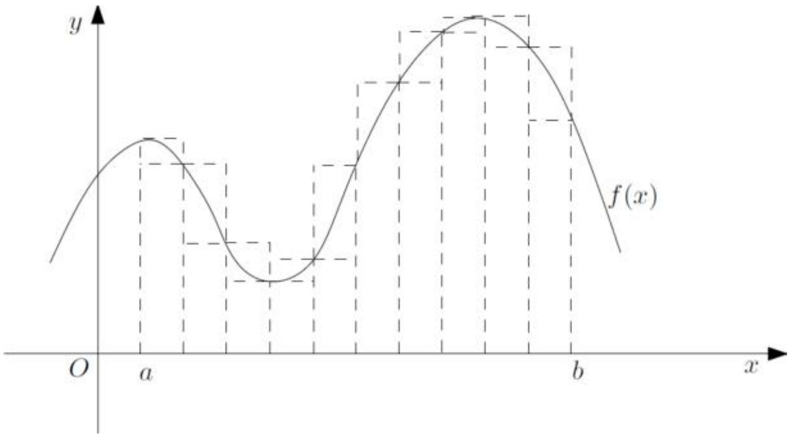
5.3 Integrale definito

Abbiamo visto che $\int f(x)dx = \{\text{primitive di } f\}$ è detto integrale indefinito perché non esiste un'unica funzione che funge da soluzione.
Supponiamo ora di voler calcolare l'area sottesa al grafico di una funzione f, definita nell'intervallo $[a, b]$ e ivi continua.
Graficamente potremmo "stimarla" per difetto e per eccesso costruendo delle opportune approssimazioni.
Ad esempio, se dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, allora ogni intervallo misura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e possiamo costruire i rettangoli di base Δx e altezza il minimo, m_i, o il massimo, M_i, della funzione nell'intervallo considerato.



Allora avremo per certo che l'area compresa tra l'asse delle ascisse e la funzione che chiameremo $\mathcal{A}(T)$ può essere stimata per difetto facendo la somma delle aree di tutti i rettangoli di base Δx che hanno per altezza m_i, e per eccesso andando a fare la somma delle aree di tutti i rettangoli di base Δx e che hanno per altezza il massimo M_i. Ovvero

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x \leq \mathcal{A} \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x =: S_n$$

Per rendere la stima più accurata possiamo dividere l'intervallo $[a, b]$ per un numero maggiore di intervalli oppure utilizzare dei trapezi.

Definizione Data una funzione $f \geq 0$ in $[a, b]$, tale che esistono e sono finiti e coincidono i $\lim_{n\mapsto+\infty} s_n = \lim_{n\mapsto+\infty} S_n$, si chiama *integrale definito* esteso all'intervallo $[a, b]$ il valore di tale limite e si indica con

$$\int_a^b f(x)dx$$

La funzione $f(x)$ è detta *integrabile* in $[a, b]$.

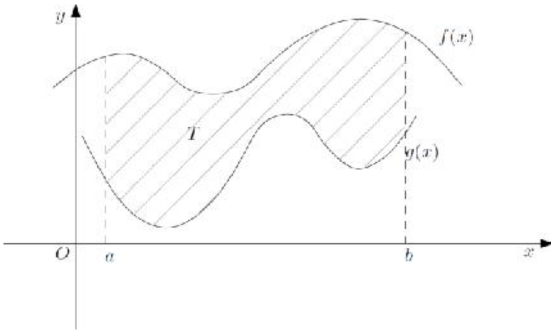
Teorema
Se f è una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ allora il

$$\lim_{n\mapsto+\infty} s_n = \lim_{n\mapsto+\infty} S_n = S$$

Osservazioni:

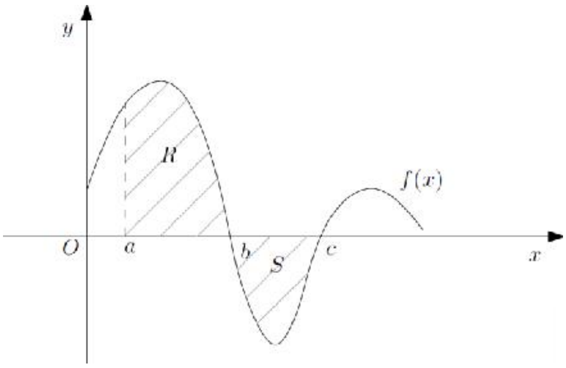
- Il simbolo $\int$ deriva da "S" di somma,
- Se $a < b$: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- Valgono le proprietà di linearità



L'area compresa tra le due funzioni

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Se invece vogliamo capire quanto misura la somma delle aree

$$R + S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

Ciò significa che quando la funzione è negativa in un intervallo anche il valore l'integrale definito è negativo, ma in valore assoluto corrisponde comunque alla misura di un'area.

Definizione consideriamo la funzione $\mathcal{F}$: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge :

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

La funzione $\mathcal{F}$ viene chiamata la **funzione integrale** di f. In particolare si ha che $\mathcal{F}(a) = 0$.

Teorema (di Torricelli - Barrow)
Sia f una funzione reale continua nell'intervallo $[a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dove F è una funzione derivabile nell'intervallo $[a,b]$ ed è tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

Ovvero F è una primitiva per f

DIMOSTRAZIONE
Consideriamo la funzione integrale $\mathcal{F}$, di f. Poiché $\mathcal{F}'(x) = f(x) = F'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora le funzioni $\mathcal{F}$ e F differiscono per una costante c, $\mathcal{F}(x) - F(x) = c \quad \forall\ x \in [a,b]$
In particolare $\mathcal{F}(a) - F(a) = c = \mathcal{F}(b) - F(b)$, ma $\mathcal{F}(a) = 0$ quindi $F(a) = -c$ e $\mathcal{F}(b) = F(b) - F(a)$
In conclusione

$$\mathcal{F}(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Il teorema di Torricelli Barrow esprime il legame tra integrale indefinito e integrale definito, quindi per calcolare un integrale definito è necessario determinare una primitiva.

Esempi:

a) $\int_2^3 2xdx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$

Quando usiamo la regola di sostituzione dobbiamo ricordarci di cambiare anche gli estremi di integrazione.

c) $\int_2^3 x e^{4x} dx$

Esercizi di ricapitolazione:

1) Calcola il valore dei seguenti integrali definiti
   a. $\int_0^2 x(x^2 - 1)^3 dx$
   b. $\int_0^2 e^x \sqrt{e^x + 1} dx$
   c. $\int_3^8 \frac{3\sqrt{x+1}}{2} dx$
   d. $\int_0^1 \frac{2}{x^2+6x+9} dx$
   e. $\int_1^2 2x \ln x \, dx$
   f. $\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \tan 2x \, dx$
   g. $\int_{-1}^0 (x-2)/(x^2 - 8x + 16) dx$
   h. $\int_{-2}^0 \frac{3x-5}{x^2+2x-3} dx$

2) Dopo aver verificato che la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ incontra la curca di equazione $y = 2^x$ nei punti $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ e $B(0; 1)$, determina l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.
3) E' data la regione finita di piano delimitata dalle funzioni $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, e dalla retta di equazione $x = 9$. Calcola l'area.
4) Calcola l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = \tan^2 x$ e $g(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
5) Dopo aver disegnato le superfici delimitate dall'asse delle x e dal grafico delle seguenti finzioni definite negli intervallo indicati, calcolane l'area.
   a. $y = -x^3$ $[-1; 2]$
   b. $y = \cos x$ $[0; \frac{5}{6}\pi]$
   c. $y = e^x - 1$ $[-1; 1]$
   d. $y = \tan x$ $[2; 5]$