

5. CALCOLO INTEGRALE

Il calcolo integrale nasce, da un lato per l'esigenza di calcolare l'area di regioni piane o volumi e dall'altro come operatore inverso del calcolo differenziale.

5.1 Integrali indefiniti

Definizione Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Si dice *primitiva* di f ogni funzione F derivabile tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Esempio $f(x) = \cos x$ ha come primitiva $F(x) = \sin x$, perché la derivata della funzione seno è la funzione coseno, ovvero $F'(x) = \cos x$. Osserviamo che un'altra primitiva di f è $F_1(x) = \sin x + 1$, in quanto $F_1'(x) = f(x)$.

Teorema

Se la funzione $f(x)$ ammette in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ come primitiva la funzione $F(x)$, allora ammette infinite primitive in I che si ottengono da $F(x)$ aggiungendo una qualsiasi costante.

DIMOSTRAZIONE

Sia $F(x)$ primitiva della funzione $f(x)$. Allora per definizione di primitiva abbiamo che $F'(x) = f(x)$.

Sia ora $c \in \mathbb{R}$ allora $[F(x) + c]' = (F(x))' + (c)' = F'(x) = f(x)$, che è proprio quello che volevamo dimostrare.

Definizione L'insieme di tutte le primitive di una funzione $f(x)$ si dice *integrale indefinito* di f e si indica con

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R} \text{ e } F \text{ primitiva di } f\}$$

$f(x)$ è detta *funzione integranda*.

Osservazione: come si vede dalla definizione di integrale indefinito, questo è l'operatore inverso della derivazione.

PROPRIETÀ: linearità

Se f_1 e f_2 sono funzioni continue in $I \subset \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int k f_1(x) dx &= k \int f_1(x) dx \\ \int (f_1(x) + f_2(x)) dx &= \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \end{aligned}$$

PRIMITIVE ELEMENTARI

$\int 0 \cdot dx = c$	
$\int dx = x + c$	$\int k \cdot f(x) = k \cdot \int f(x) dx$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + c$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \text{sen } f(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + c$
$\int \cos x dx = \text{sen } x + c$	$\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = \text{sen } f(x) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg } f(x) + c$
$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\text{ctg } x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -\text{ctg } f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsin } x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \text{arcsin } f(x) + c$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \text{arctg } f(x) + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$

Esercizi:

- 1) $\int x^4 dx$
- 2) $\int \sqrt{x^3} dx$
- 3) $\int (3x^2 - 4x + 7) dx$
- 4) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 2 \cos x - 8e^x - \frac{4}{x}) dx$

5.2 Tecniche di integrazione

1) Primitive riconducibili a quelle elementari

Esempi:

a) $\int x(x^2 + 1)^4 dx =$

b) $\int \frac{1}{2x-5} dx =$

c) $\int x^2 e^{-x^3} dx =$

d) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx =$

e) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}} dx =$

f) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

g) $\int x e^{6x^2} dx =$

h) $\int \frac{1}{x \ln x} dx =$

i) $\int x \sqrt{4-x^2} dx =$

j) $\int \sin x \cos^6 x dx =$

2) Integrali delle funzioni razionali fratte

Sono tutti gli integrali della forma:

$$\int \frac{n(x)}{d(x)} dx$$

Dove $n(x)$ e $d(x)$ sono due funzioni polinomiali.

Se il grado di $n(x)$ è maggiore o uguale del grado di $d(x)$, allora si procede facendo la divisione polinomiale andando poi a scomporre il numeratore.

Esempio:

$$\int \frac{4x^4 + 8x^2 + x + 3}{2x^2 + 1} dx = \int \left(2x^3 + 3 + \frac{x}{2x^2 + 1} \right) dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 1) + c$$

Se il grado di $d(x)$ è minore del grado del numeratore allora distinguiamo i casi, quando il grado è uno e quando il grado è due.

Se $\deg(d(x)) = 1$ allora ci riconduciamo al logaritmo naturale.

Esempio:

$$\int \frac{1}{x+6} dx = \ln|x+6| + c$$

Se $\deg(d(x)) = 2$. In questo caso la risoluzione dell'integrale dipenderà dal delta di $d(x)$

$$d(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac$$

- Se $\Delta > 0$. Procediamo andando a scomporre il denominatore, per poi spezzare la funzione razionale fratta nella somma di due funzioni razionali i cui denominatori hanno grado 1.

Esempio:

$$\int \frac{2x-7}{x^2-x-2} dx =$$

Il denominatore è $x^2 - x - 2$ e ha $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione $x^2 - x - 2 = 0$, esse sono $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$.

Ricordiamo che per i trinomi di secondo grado $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ dove x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione.

Nel nostro caso $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.

Il nostro scopo sarà trovare $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{2x-7}{x^2-2x-2}$$

Procediamo:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx - 2B}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - 2B}{(x-2)(x+1)}$$

Per avere l'uguaglianza uguagliamo i coefficienti della x di ugual grado.

$$\begin{cases} A+B=2 \\ A-2B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2-B \\ 2-3B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3 \end{cases}$$

Quindi l'integrale iniziale si riconduce a

$$= -\int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x-2| + 3 \ln|x+1| + c$$

- Se $\Delta < 0$, dobbiamo ricondurre il denominatore alla somma di due quadrati, e l'integrale in questa forma (che quindi risulta essere un integrale immediato) $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)+1} dx = \arctan f(x) + c$

Esempio

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 6} dx$$

Il denominatore è $x^2 - 4x + 6$ e ha $\Delta = 16 - 24 < 0$.

Proviamo a trasformare il denominatore come somma di quadrati

$$x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + (\sqrt{2})^2$$

Riprendendo l'integrale iniziale risulta

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2 + (\sqrt{2})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

In generale $\int \frac{1}{(x+k)^2 + n^2} dx = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x+k}{n}\right) + c$

- Se $\Delta = 0$, scriveremo il denominatore come un quadrato perfetto per poi ricondurci ad un integrale di questa forma $\int \frac{f'(x)}{(f(x))^2} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$

Esempio

$$\int \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} dx$$

Il denominatore è $x^2 - 4x + 4$, il $\Delta = 16 - 16 = 0$

Il denominatore è quindi un quadrato perfetto e infatti $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

$$\int \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{2x - 4 + 4}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} dx + 4 \int \frac{1}{(x - 2)^2} dx =$$

$$= \ln(x^2 - 4x + 4) - 4 \frac{1}{x - 2} + c$$

Esercizi

- a) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - x - 1}{x + 2} dx$
- b) $\int \frac{x + 7}{x + 6} dx$
- c) $\int \frac{3x - 5}{1 + x^2} dx$
- d) $\int \frac{1}{(x + 1)^2 + 4} dx$
- e) $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$
- f) $\int \frac{x - 1}{x^2 + x - 6} dx$
- g) $\int \frac{3x + 5}{4x^2 + 12x + 11} dx$

Esercizi ulteriori

- a) $\int (\tan^2 x - 3 \cos x) dx$
- b) $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$
- c) $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$
- d) $\int \cos x \sin^4 x$
- e) $\int \frac{1}{\cos^2 x \tan x} dx$
- f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$
- g) $\int \frac{x - 7}{x^2 + x - 6} dx$
- h) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx$
- i) $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx$

3) Integrali per sostituzione

La regola di sostituzione è utile quando abbiamo integrali del tipo “non visibile”, cioè non riusciamo in alcun modo a ricondurli ad integrali immediati. L’idea è quella di fare un cambio di variabile. In pratica:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

Dove si è posto che :

$$x = g^{-1}(x)$$

$$t = g(x)$$

$$dt = g'(x)dx$$

Abbiamo riportato l'intero integrale nella variabile "t", attenzione perché è necessario cambiare anche il dx.

Esempio

$$\int \frac{1}{2(\sqrt{x}-2)} dx = \int \frac{2t}{2(t-2)} dt = \int \frac{t}{(t-2)} dt = \int \frac{t-2+2}{t-2} dt = \int \frac{2}{t-2} dt + \int dt$$

$$= 2 \ln |t-2| + t + c = 2 \ln |\sqrt{x}-2| + \sqrt{x} + c$$

Abbiamo posto $t = \sqrt{x}$
 $x = t^2$
 $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2t dt$

Esercizi

- a) $\int x\sqrt{1+x} dx$ (poni $t = \sqrt{1+x}$)
- b) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ (poni $t = e^x$)
- c) $\int x\sqrt{x+2} dx$

4) Integrali per parti

L'integrazione per parti viene generalmente usata quando ci si trova di fronte ad un prodotto che non sia un integrale di quelli immediati. Sfrutta questa regola:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Deriva dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

Osservazione: si possono prendere come f' delle funzioni facili da integrare (es. $e^x, \sin x, \cos x$). Le funzioni $\ln x$ e $\arctan x$ sono da scegliere come g perché non sappiamo come integrarle.

Esempio

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Abbiamo posto $f' = \sin x$ $g = x$
 $f = -\cos x$ $g' = 1$

Esercizi:

- a) $\int \ln x dx$
- b) $\int x^2 e^x dx$
- c) $\int \sin^2 x dx$
- d) $\int e^{3x} \cos x dx$

Esercizi finali.

- 1) $\int \frac{1}{4x+3} dx$
- 2) $\int \frac{1-\sqrt{x+2}}{x+2} dx$
- 3) $\int \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx$

$$4) \int \frac{x^2-1}{x^2-3x+10} dx$$

$$5) \int \frac{\sqrt{2+\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

$$6) \int x \sin 3x dx$$

$$7) \int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

$$8) \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx$$

$$9) \int \frac{1}{(3x+1)^3} dx$$

$$10) \int \frac{(\ln x-1)^2}{x} dx$$