

## 5. CALCOLO INTEGRALE

Il calcolo integrale nasce, da un lato per l'esigenza di calcolare l'area di regioni piane o volumi e dall'altro come operatore inverso del calcolo differenziale.

### 5.1 Integrali indefiniti

**Definizione** Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale. Si dice *primitiva* di  $f$  ogni funzione  $F$  derivabile tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

**Esempio**  $f(x) = \cos x$  ha come primitiva  $F(x) = \sin x$ , perché la derivata della funzione seno è la funzione coseno, ovvero  $F'(x) = \cos x$ . Osserviamo che un'altra primitiva di  $f$  è  $F_1(x) = \sin x + 1$ , in quanto  $F_1'(x) = f(x)$ .

#### Teorema

Se la funzione  $f(x)$  ammette in un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  come primitiva la funzione  $F(x)$ , allora ammette infinite primitive in  $I$  che si ottengono da  $F(x)$  aggiungendo una qualsiasi costante.

#### DIMOSTRAZIONE

Sia  $F(x)$  primitiva della funzione  $f(x)$ . Allora per definizione di primitiva abbiamo che  $F'(x) = f(x)$ .

Sia ora  $c \in \mathbb{R}$  allora  $[F(x) + c]' = (F(x))' + (c)' = F'(x) = f(x)$ , che è proprio quello che volevamo dimostrare.

**Definizione** L'insieme di tutte le primitive di una funzione  $f(x)$  si dice *integrale indefinito* di  $f$  e si indica con

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R} \text{ e } F \text{ primitiva di } f\}$$

$f(x)$  è detta *funzione integranda*.

**Osservazione:** come si vede dalla definizione di integrale indefinito, questo è l'operatore inverso della derivazione.

#### PROPRIETÀ: linearità

Se  $f_1$  e  $f_2$  sono funzioni continue in  $I \subset \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \int k f_1(x) dx &= k \int f_1(x) dx \\ \int (f_1(x) + f_2(x)) dx &= \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \end{aligned}$$

PRIMITIVE ELEMENTARI

$\int 0 \cdot dx = c$	
$\int dx = x + c$	$\int k \cdot f(x) = k \cdot \int f(x) dx$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + c$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \text{sen } f(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + c$
$\int \cos x dx = \text{sen } x + c$	$\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = \text{sen } f(x) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg } f(x) + c$
$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\text{ctg } x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -\text{ctg } f(x) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsin } x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \text{arcsin } f(x) + c$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \text{arctg } f(x) + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)  + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$

Esercizi:

- 1)  $\int x^4 dx$
- 2)  $\int \sqrt{x^3} dx$
- 3)  $\int (3x^2 - 4x + 7) dx$
- 4)  $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 2 \cos x - 8e^x - \frac{4}{x}) dx$

## 5.2 Tecniche di integrazione

### 1) Primitive riconducibili a quelle elementari

**Esempi:**

a)  $\int x(x^2 + 1)^4 dx =$

b)  $\int \frac{1}{2x-5} dx =$

c)  $\int x^2 e^{-x^3} dx =$

d)  $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx =$

e)  $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}} dx =$

f)  $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

g)  $\int x e^{6x^2} dx =$

h)  $\int \frac{1}{x \ln x} dx =$

i)  $\int x \sqrt{4-x^2} dx =$

j)  $\int \sin x \cos^6 x dx =$

### 2) Integrali delle funzioni razionali fratte

Sono tutti gli integrali della forma:

$$\int \frac{n(x)}{d(x)} dx$$

Dove  $n(x)$  e  $d(x)$  sono due funzioni polinomiali.

Se il grado di  $n(x)$  è maggiore o uguale del grado di  $d(x)$ , allora si procede facendo la divisione polinomiale andando poi a scomporre il numeratore.

**Esempio:**

$$\int \frac{4x^4 + 8x^2 + x + 3}{2x^2 + 1} dx = \int \left( 2x^3 + 3 + \frac{x}{2x^2 + 1} \right) dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 1) + c$$

Se il grado di  $d(x)$  è minore del grado del numeratore allora distinguiamo i casi, quando il grado è uno e quando il grado è due.

Se  $\deg(d(x)) = 1$  allora ci riconduciamo al logaritmo naturale.

**Esempio:**

$$\int \frac{1}{x+6} dx = \ln|x+6| + c$$

Se  $\deg(d(x)) = 2$ . In questo caso la risoluzione dell'integrale dipenderà dal delta di  $d(x)$

$$d(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac$$

- Se  $\Delta > 0$ . Procediamo andando a scomporre il denominatore, per poi spezzare la funzione razionale fratta nella somma di due funzioni razionali i cui denominatori hanno grado 1.

**Esempio:**

$$\int \frac{2x-7}{x^2-x-2} dx =$$

Il denominatore è  $x^2 - x - 2$  e ha  $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ . Cerchiamo le soluzioni dell'equazione  $x^2 - x - 2 = 0$ , esse sono  $x_1 = 2$  e  $x_2 = -1$ .

Ricordiamo che per i trinomi di secondo grado  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  dove  $x_1$  e  $x_2$  sono le soluzioni dell'equazione.

Nel nostro caso  $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ .

Il nostro scopo sarà trovare  $A, B \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{2x-7}{x^2-2x-2}$$

Procediamo:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx - 2B}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - 2B}{(x-2)(x+1)}$$

Per avere l'uguaglianza uguagliamo i coefficienti della  $x$  di ugual grado.

$$\begin{cases} A+B=2 \\ A-2B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2-B \\ 2-3B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3 \end{cases}$$

Quindi l'integrale iniziale si riconduce a

$$= -\int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x-2| + 3 \ln|x+1| + c$$

- Se  $\Delta < 0$ , dobbiamo ricondurre il denominatore alla somma di due quadrati, e l'integrale in questa forma (che quindi risulta essere un integrale immediato)  $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)+1} dx = \arctan f(x) + c$

**Esempio**

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 6} dx$$

Il denominatore è  $x^2 - 4x + 6$  e ha  $\Delta = 16 - 24 < 0$ .

Proviamo a trasformare il denominatore come somma di quadrati

$$x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + (\sqrt{2})^2$$

Riprendendo l'integrale iniziale risulta

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2 + (\sqrt{2})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

In generale  $\int \frac{1}{(x+k)^2 + n^2} dx = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x+k}{n}\right) + c$

- Se  $\Delta = 0$ , scriveremo il denominatore come un quadrato perfetto per poi ricondurci ad un integrale di questa forma  $\int \frac{f'(x)}{(f(x))^2} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$

**Esempio**

$$\int \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} dx$$

Il denominatore è  $x^2 - 4x + 4$ , il  $\Delta = 16 - 16 = 0$

Il denominatore è quindi un quadrato perfetto e infatti  $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ .

$$\int \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{2x - 4 + 4}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} dx + 4 \int \frac{1}{(x - 2)^2} dx =$$

$$= \ln(x^2 - 4x + 4) - 4 \frac{1}{x - 2} + c$$

### Esercizi

- a)  $\int \frac{x+7}{x+6} dx$
- b)  $\int \frac{3x-5}{1+x^2} dx$
- c)  $\int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx$
- d)  $\int \frac{1}{x^2-4} dx$
- e)  $\int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx$
- f)  $\int \frac{3x+5}{4x^2+12x+11} dx$

### 3) Integrali per sostituzione

La regola di sostituzione è utile quando abbiamo integrali del tipo “non visibile”, cioè non riusciamo in alcun modo a ricondurli ad integrali immediati. L’idea è quella di fare un cambio di variabile. In pratica:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

Dove si è posto che :

$$x = g^{-1}(x)$$

$$t = g(x)$$

$$dt = g'(x)dx$$

Abbiamo riportato l’intero integrale nella variabile “t”, attenzione perché è necessario cambiare anche il dx.

#### Esempio

$$\int \frac{1}{2(\sqrt{x} - 2)} dx = \int \frac{2t}{2(t-2)} dt = \int \frac{t}{(t-2)} dt = \int \frac{t-2+2}{t-2} dt = \int \frac{2}{t-2} dt + \int dt$$

$$= 2 \ln |t - 2| + t + c = 2 \ln |\sqrt{x} - 2| + \sqrt{x} + c$$

$$t = \sqrt{x}$$

Abbiamo posto  $x = t^2$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2t dt$$

#### Esercizi

- a)  $\int x\sqrt{1+x} dx$  (poni  $t = \sqrt{1+x}$ )
- b)  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$  (poni  $t = e^x$ )

### 4) Integrali per parti

L’integrazione per parti viene generalmente usata quando ci si trova di fronte ad un prodotto che non sia un integrale di quelli immediati. Sfrutta questa regola:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Deriva dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

**Osservazione:** si possono prendere come  $f'$  delle funzioni facili da integrare (es.  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ). Le funzioni  $\ln x$  e  $\arctan x$  sono da scegliere come  $g$  perché non sappiamo come integrarle.

**Esempio**

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Abbiamo posto 
$$\begin{array}{ll} f' = \sin x & g = x \\ f = -\cos x & g' = 1 \end{array}$$

**Esercizi:**

- a)  $\int \ln x \, dx$
- b)  $\int x^2 e^x \, dx$
- c)  $\int \sin^2 x \, dx$
- d)  $\int e^{3x} \cos x \, dx$