4.3 Teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema (di Fermat)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e si x_0 un punto di massimo o minimo (relativo o assoluto) per f. Allora $f'(x_0) = 0$ si dice anche che x_0 è un punto *stazionario* per f.

DIMOSTRAZIONE:

Lo dimostriamo supponendo che x_0 sia un punto di massimo per f, in modo analogo lo si può dimostrare ponendo x_0 punto di minimo.

Sia dunque x_0 punto di massimo, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$

Abbiamo che

$$\forall\, x > x_0 \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\forall\, x < x_0 \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \Rightarrow f'_-(x_0) \geq 0$$

Essendo f derivabile in x_0 abbiamo che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e quindi l'unica possibilità è che siano entrambe nulle ovvero $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.

Osservazioni:

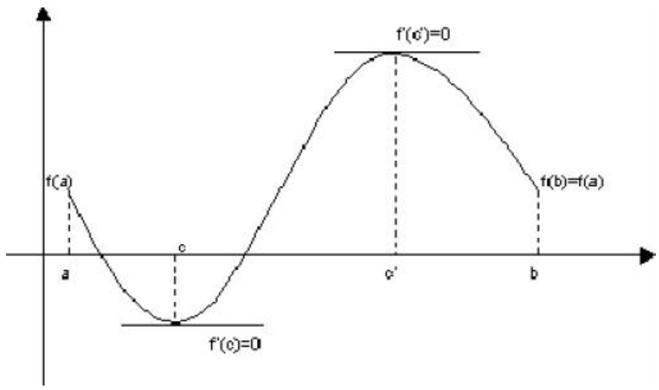
1) Le rette tangenti a G_f nei punti di massimo o minimo di (a, b) sono rette parallele all'asse delle ascisse.
2) Non vale il viceversa del teorema di Fermat, cioè: esistono punto stazionari per f, (dove il valore della derivata prima si annulla), che non sono punti né di massimo e né di minimo. Come ad esempio accade per $f(x) = x^3$.
3) Il punto x_0 deve essere un punto interno ad $[a, b]$, se così non fosse e x_0 è un punto di massimo o minimo della funzione non è detto che $f'(x_0) = 0$.

Teorema (di Rolle)

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione

- continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$,
- derivabile nell'intervallo aperto (a, b),
- tale che $f(a) = f(b)$,

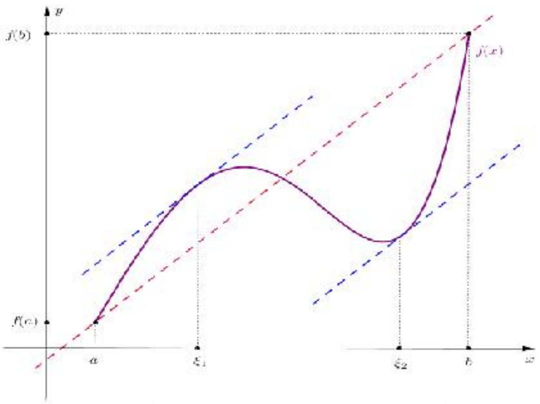
allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.



Dal punto di vista geometrico il teorema di Rolle ci dice che sotto le ipotesi del teorema, se $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto interno all'intervallo (a, b) che ha tangente orizzontale.

Teorema (di Lagrange)
Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione
- continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$,
- derivabile nell'intervallo aperto (a, b),

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Dal punto di vista geometrico il teorema di Lagrange ci dice che, sotto le ipotesi del teorema, esiste un punto all'interno dell'intervallo la cui retta tangente al grafico è parallela alla retta secante che passa per a, b.

Corollario (test di monotonia)
Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$e derivabile in (a, b). Allora
- f è crescente in $[a, b]$ se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$
- f è decrescente in $[a, b]$ se e solo se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

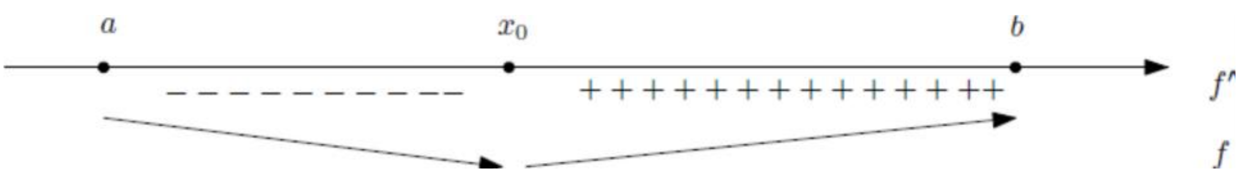
Osservazione: Se $f' > 0$ $(f' < 0)$ per ogni $x \in (a, b)$ allora diremo che f è strettamente crescente (decrescente).
Non vale il viceversa: se f è strettamente crescente (decrescente) può esistere x_0 tale che $f'(x_0) = 0$. Riusciresti a trovarne un esempio?

Corollario 2
Una funzione f derivabile in $[a, b]$ è costante se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

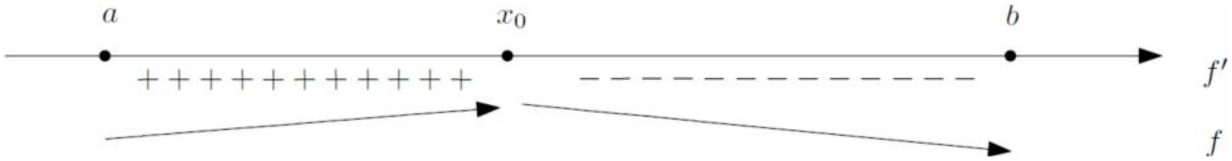
Corollario 3
Siano f, g funzioni derivabili in $[a, b]$. Allora $f' = g' \quad \forall x \in (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad f - g = k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Corollario 4 (Criterio per determinare punti di massimo e minimo)
Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto stazionario per f. (cioè $f'(x_0) = 0$).
Abbiamo che:

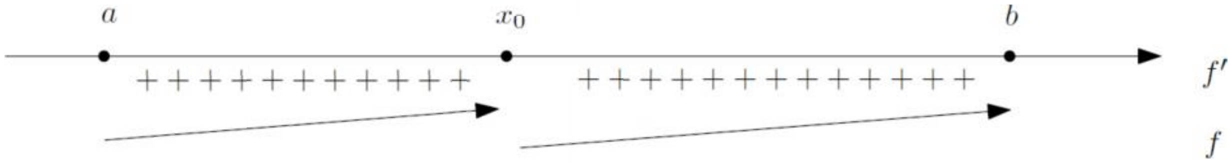
1) Se $f'(x) < 0 \; \forall \, x \in (a, x_0)$ e $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in (x_0, b)$, allora x_0 è un punto di *min relativo* per f



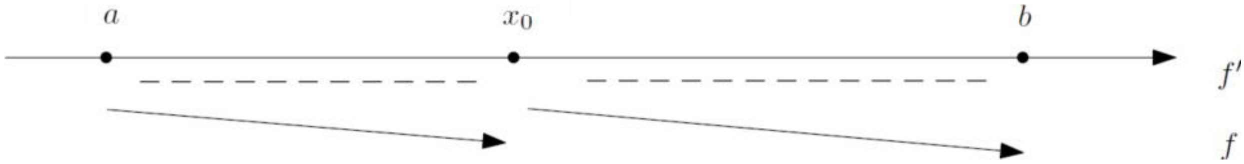
2) Se $f'(x) > 0\ \forall\, x \in (a, x_0)$ e $f'(x) < 0\ \ \forall\, x \in (x_0, b)$, allora x_0 è un punto di *max relativo* per f



3) Se, $f'(x) > 0\ \forall\, x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ allora x_0 è un punto a *tangente orizzontale ascendente*



4) Se $f'(x) < 0\ \forall\, x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, allora x_0 è un punto a *tangente orizzontale discendente*



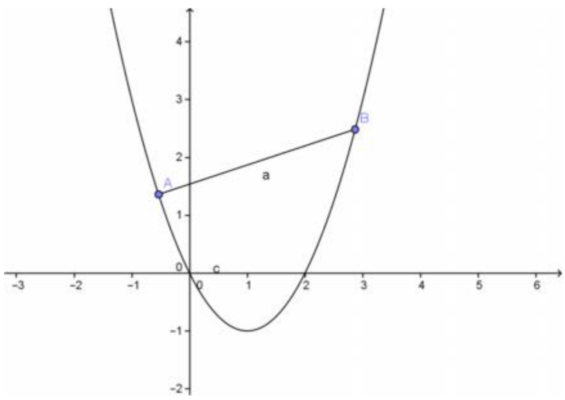
Esercizi: determinare massimi e minimi relativi o assoluti delle seguenti funzioni:

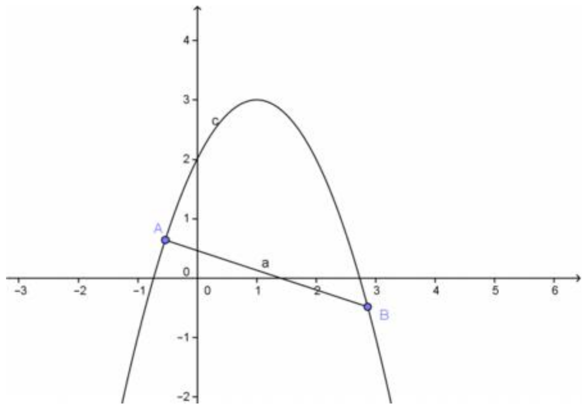
1) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$
2) $f(x) = x^3(1 - x)$

4.4 Funzioni concave e convesse

Definizione Sia $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione f si dice *convessa* in (a, b) se, presi due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in (a, b)$, il segmento che congiunge $A(x_1, f(x_1))$ e $B(x_2, f(x_2))$ giace “al di sopra” di G_f nell’intervallo compreso tra x_1 e x_2.

Esempi:





Più formalmente:

Definizione: Sia $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. f si dice *convessa* in (a, b) se presi due punti qualsiasi $x_1 < x_2 \in (a, b)$ si ha che:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Teorema

Sia f una funzione derivabile due volte in (a, b). Si ha che:

- f è convessa in (a, b) se e solo se $f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$
- f è concava in (a, b) se e solo se $f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$

Definizione Sia $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Un punto x_0 dove la funzione f sia derivabile almeno due volte, di dice *punto di flesso* se f è concava in (a, x_0) e convessa in (x_0, b) o viceversa.

Osservazione: il punto di flesso è per definizione un punto in cui cambia la concavità della curva. Nei punti di flesso $f'' = 0$, non è vero il viceversa.

Esempi:

1) $f(x) = x^3$
2) $f(x) = x(x + 2)^3$

4.5 Teorema di De L'Hospital

È utile per risolvere dei limiti di forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Rappresenta quindi l'applicazione del calcolo delle derivate al calcolo dei limiti.

Teorema

Siano f, g due funzioni definite e derivabili almeno in un intorno di x_0 dove x_0 può essere un numero reale oppure $\pm\infty$, con $g'(x) \neq 0$ in tale intorno . Supponiamo inoltre che $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = \lim_{x\mapsto x_0} g(x) = 0$ oppure che $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = \pm\infty$ e il $\lim_{x\mapsto x_0} g(x) = \pm\infty$.

Allora se esiste, finito o non, il $\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il $\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e tali limiti sono uguali, cioè

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\mapsto x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Osservazioni: La conclusione rimane valida anche per il limite destro o sinistro. Quando nel calcolo di un limite applicheremo il teorema di De L'Hospital, porremo una "H" sopra al simbolo di uguaglianza in questo modo:

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =^H \lim_{x\mapsto x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Definizioni Siano f, g due funzioni definite in un intorno di x_0 dove x_0 può essere un numero reale oppure $\pm\infty$, con $g(x) \neq 0$ in tale intorno. Se

1) $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = 0$ allora f si dice *infinitesimo*
   $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = \pm\infty$ allora f si dice *infinito.*
2) Se nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si trova che

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \quad \text{con } l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \Rightarrow \quad f \text{ è infinitesimo dello stesso ordine di } g \\ 0 & \Rightarrow \quad f \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } g \\ \infty & \Rightarrow \quad f \text{ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } g \end{cases}$$

Se nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ si trova che

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \quad \text{con } l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \Rightarrow \quad f \text{ è infinito dello stesso ordine di } g \\ 0 & \Rightarrow \quad f \text{ è infinito di ordine inferiore rispetto a } g \\ \infty & \Rightarrow \quad f \text{ è infinito di ordine superiore rispetto a } g \end{cases}$$

Se i limiti non esistono gli infinitesimi o gli infiniti si dicono non confrontabili.

Esempi:

1) $\lim_{x\mapsto 0} \frac{\sin x}{x} =^H \lim_{x\mapsto 0} \cos x = 1$
2) $\lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} =^H \lim_{x\mapsto 0} \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = 0$
3) $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{\ln x + x}{x^2} =$
4) $\lim_{x\mapsto +\infty} (x^2 - 1)e^{-3x} =$
5) $\lim_{x\mapsto 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{x^3} =$

Osservazione: In qualche caso il teorema di De L'Hospital risulta superfluo, non ci dobbiamo dimenticare quanto fatto finora. Mentre in altri casi non è possibile applicarlo.
Per esempio il $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ si dimostra utilizzando il teorema dei due carabinieri in quanto la funzione seno è limitata.

Esercizio 9.10 Calcoliamo:

a) $\lim_{x\mapsto 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$

b) $\lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{3}{\sin x}-\frac{2}{x}\right)$

4.6 Studio di funzione

Riprendiamo quanto precedentemente detto andando a completare l'elenco delle azioni che dobbiamo svolgere per studiare in modo completo una funzione.

0) Classificazione
1) Determinare D_f
2) Intersezione con gli assi ed eventuali simmetrie
3) Determinare il segno di $f(x)$, ovvero studiare quali valori $f(x) \geq 0$
4) Studiare il comportamento agli estremi del dominio.
5) Crescenza, decrescenza ed eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti. Studio del segno di $f'(x)$.
6) Concavità, convessità ed eventuali punti di flesso. Studio del segno di $f''(x)$.

Esercizi:

Razionali fratte

1) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$
2) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

Irrazionali

3) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$
4) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Esponenziali

5) $f(x) = e^{\frac{(x-1)}{2x}}$
6) $f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}$

Logaritmiche

7) $f(x) = \ln(x^2-1)$
8) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$