4.1 Funzione derivata di ordine superiore

Se $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in ogni punto di $[a, b]$, possiamo considerare la funzione derivata $f': [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto f'(x)$.
Se la funzione f' è derivabile in $x_0 \in [a, b]$ diremo che f è derivabile due volte in x_0 e chiameremo tale valore *derivata seconda* di f in x_0, indicata con $f''(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$
In modo analogo, se f è derivabile n volte in x_0, possiamo definire le derivate $f''', f^{iv}, \dots, f^{(n)}$.

Esempio: calcolare la derivata seconda di $f(x) = 3x^4 + 5\sqrt{x} + 6$.
$f'(x) = 12x^3 + \frac{5}{2\sqrt{x}}$,
$f''(x) = 36x^2 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = 36x^2 - \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{2}}$.

4.2 Applicazioni al calcolo delle derivate

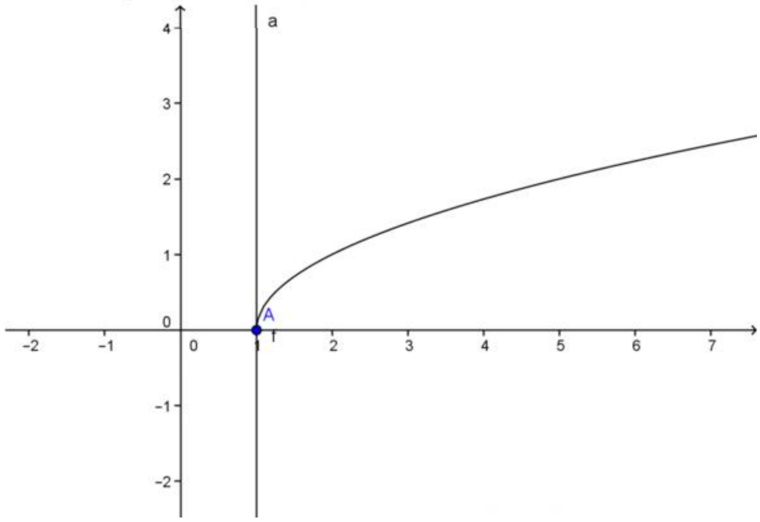
Retta tangente al grafico di una funzione.

Esempi:

1) Determiniamo la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = -x^3 + 4x$ nel punto $x_0 = -2$
   Per far questo dobbiamo calcolare il valore della funzione nel punto x_0, la funzione derivata prima e il valore della funzione derivata nel punto x_1
   $f(x_0) = f(-2) = 8 - 8 = 0,$
   $f'(x) = -3x^2 + 4,$
   $f'(x_0) = f'(-2) = -12 + 4 = -8.$
   Ricordiamo che la formula della retta tangente al grafico di una funzione nel punto di ascissa x_0 è data dalla formula:
   $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
   Nel nostro caso diventa
   $$y = -8(x+2) \quad \Rightarrow \quad y = -8x - 16$$
2) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{10}{x^2} - \frac{x}{2}$ perpendicolare al suo asintoto obliquo.

Se $\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ allora f non è derivabile in x_0, ma se f è continua in x_0 la retta tangente a G_f in $(x_0, f(x_0))$ è una retta parallela all'asse y e che il punto x_0 è un punto a tangente verticale o *punto di flesso a tangente verticale*.

Esempio $f(x) = \sqrt{x-1}$.



Abbiamo detto che la retta tangente a G_f in x_0 è data dall'equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Il secondo membro dell'equazione precedente può essere usato per approssimare $f(x)$ in un intorno del punto x_0.

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

In effetti la retta tangente in un immediato intorno del punto x_0 è molto vicina alla curva e quindi in quell'intorno ne definisce una buona approssimazione. Tale approssimazione è detta *approssimazione del primo ordine.*

Possiamo raffinare tale approssimazione in questo modo:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Tale approssimazione è detta *polinomio di Taylor* di f nel punto x_0.

Esempio Trovare un valore approssimato per $\sqrt[3]{9}$. Per farlo usiamo una approssimazione del primo ordine con questi dati:
$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 9$, $x_0 = 8$.

Esercizi riassuntivi

1) Calcola la derivata delle seguenti funzioni:
   a. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
   b. $f(x) = (2x^2 - 1)(x + 5)$
   c. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$
   d. $f(x) = \ln(x^4 - x^2 - 1)$
   e. $f(x) = 3e^{2x} - 1$
   f. $f(x) = x\ln(x^2 + 1)$
   g. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
   h. $f(x) = \sqrt{\sin^3 x}$
   i. $f(x) = \arctan x$
   j. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$
   k. $f(x) = \arctan(2x - 3)$

2) Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$, nel suo punto di ascissa x_0:
   a. $f(x) = (1 - 2x)^3$ $\qquad x_0 = 1$
   b. $f(x) = \ln^3 x$ $\qquad x_0 = e$

3) Determina il parametro a per cui la tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{ax^2+3x}{2x+1}$ nel punto di ascissa $x = 2$ risulti orizzontale.

4) Determina le ascisse dei punti appartenenti al grafico della funzione $f(x) = \frac{(x^2+4x)}{(2x-1)}$ in cui la retta tangente ha coefficiente angolare uguale a -1.

5) Determina l'angolo α formato dalle rette tangenti ai grafici delle funzioni $y = x^2 + 6x - 2$ e $y = 2\ln|x - 1| - \frac{x^2+2x}{2}$ nei loro punti di ascissa -2.