

Matematica ed Informatica+Fisica
ESERCIZI Modulo di Matematica ed Informatica
Corso di Laurea in Farmacia - anno acc. 2012/2013
docente: Giulia Giantesio, gntgli@unife.it

Esercizi 8: Statistica Induttiva

Uso delle tavole della distribuzione normale.

Esercizio 1. L'altezza dei figli di un uomo alto 180 centimetri è normalmente distribuita con media 182 e varianza 10. Qual è la probabilità che il figlio dell'uomo:

- a) abbia un'altezza compresa tra 180 e 184 cm?
- b) superi i 185 cm di altezza?

Soluzione.

a) Abbiamo che:

$$\begin{aligned} P(180 \leq X \leq 184) &= P\left(\frac{180 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{184 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{2}{\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \\ &= 2P\left(Z \leq \frac{2}{\sqrt{10}}\right) - 1 = 2\Phi(0.63) - 1 = 2 \cdot (0.7357) - 1 = 0.4714 = 47.14\% \end{aligned}$$

b) Abbiamo che:

$$\begin{aligned} P(X > 185) &= 1 - P(X \leq 185) = 1 - P\left(Z \leq \frac{185 - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(0.95) = 1 - 0.8289 = 0.1711 = 17.11\% \end{aligned}$$

Esercizio 2. L'altezza media (in cm) di un bambino di 7 mesi è normalmente distribuita con $\mu = 71$ e $\sigma^2 = 6.25$. Qual è la percentuale di bambini di 7 mesi che superano i 74 cm di altezza?

Soluzione. $P(X > 74) = 1 - P(X \leq 74) = 0.1151 = 11.51\%$

Esercizio 3. Un processo produce cuscinetti i cui diametri sono normalmente distribuiti con $\mu = 2.505$ cm e $\sigma = 0.008$ cm. Affinché un cuscinetto possa essere utilizzato, è necessario che il suo diametro sia compreso tra 2.49 e 2.51 cm. Quale percentuale dei cuscinetti non potrà essere utilizzata?

Soluzione. Troviamo la percentuale dei cuscinetti che potrà essere utilizzata:

$$\begin{aligned} P(2.49 \leq X \leq 2.51) &= P\left(\frac{2.49 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{2.51 - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= P(-1.875 \leq Z \leq 0.625) = \Phi(0.625) - \Phi(-1.875) = \Phi(0.625) - (1 - \Phi(1.875)) = \\ &= 0.7357 - (1 - 0.9699) = 0.7056 = 70.56\%. \end{aligned}$$

Dunque non potranno essere utilizzati il 29.44% dei cuscinetti.

Esercizio 4. Il peso di certe confezioni alimentari prodotte in modo automatico è una variabile aleatoria normale X con $\mu = 250$ g e $\sigma = 3$ g. Calcolare la probabilità che una confezione:

- a) pesi meno di 245 g;
- b) pesi più di 250 g;
- c) abbia un peso tra 247 g e 253 g.

Soluzione.

- a) $P(X < 245) = P(Z < -1.67) = \Phi(-1.67) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475 = 4.75\%$;
- b) $P(X > 250) = P(Z > 0) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 0.5 = 50\%$;
- c) $P(247 < X < 253) = P(-1 < Z < 1) = 2P(Z < 1) - 1 = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826 = 68.26\%$.

Intervalli di confidenza per la media.

Esercizio 1. La caratteristica X di una popolazione è normalmente distribuita con varianza $\sigma^2 = 4$. Si estrae un campione casuale di $n = 36$ osservazioni indipendenti. Dal campionamento si ottiene il valore $\bar{x} = 13.8$ per la media campionaria. Calcolare un intervallo di confidenza al 95% per la media μ di X .

Soluzione. Sia Z una variabile aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$, dobbiamo trovare z tale che $P(-z < Z < z) = 0.95$. Poiché $P(-z < Z < z) = 2P(Z < z) - 1$, abbiamo che:

$$2P(Z < z) - 1 = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(Z < z) = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1.96.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} 0.95 &= P(-1.96 < Z < 1.96) = P\left(-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.96\right) = \\ &= P\left(-1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\bar{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= P\left(13.8 - 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{36}} < \mu < 13.8 + 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{36}}\right) = P(13.15 < \mu < 14.45). \end{aligned}$$

Dunque $\mu \in (13.15; 14.45)$ al 95%.

Esercizio 2. Tra i pasticcini prodotti artigianalmente in una pasticceria se ne prelevano $n = 100$; risulta che il loro peso medio è pari a 35 g. Si sa che lo scarto quadratico medio del peso di tutti i pasticcini prodotti è pari a 4 g. Si trovi l'intervallo di confidenza al 98% per il peso medio di tutti i pasticcini prodotti.

Soluzione. Per il livello di confidenza del 98% si ha $z = 2.32$ e $\mu \in (34.07; 35.93)$.

Esercizio 3. Una partita di bulloni presenta un diametro medio μ incognito; la varianza del diametro dei bulloni è pari a 0.01 cm. Si estrae un campione di 1000 bulloni, sui quali si osserva un diametro medio pari a 1.2 cm. Determinare l'intervallo di confidenza per μ al 97%.

Soluzione. Per il livello di confidenza del 97% si ha $z = 2.17$ e $\mu \in (1.193; 1.207)$.

Esercizio 4. Il numero medio di battiti cardiaci al minuto X per una certa popolazione è normalmente distribuita con $\sigma = 10$. Si estrae un campione casuale di $n = 49$ soggetti. Dal campionamento si ottiene il valore medio $\bar{x} = 90$. Trovare gli intervalli di confidenza al 90%, 95% e al 99% per la media μ di X .

Soluzione. Per il grado di fiducia del 90% si ha $z = 1.64$ e $\mu \in (87.66; 92.34)$.
 Per il grado di fiducia del 95% si ha $z = 1.96$ e $\mu \in (87.20; 92.80)$.
 Per il grado di fiducia del 99% si ha $z = 2.57$ e $\mu \in (86.33; 93.67)$.

Esercizio 5. Un liceo vuole determinare il voto medio in Matematica dei suoi studenti a fine anno scolastico. A tale scopo, si estrae un campione casuale di 200 studenti del liceo e se ne rilevano i voti finali in Matematica, ottenendo i seguenti dati:

Voto in Matematica	3	4	5	6	7	8	9
Numero Studenti	20	36	42	54	24	18	6

- Calcolare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico medio dei dati raccolti.
- Sapendo che “voti degli studenti” è una variabile normalmente distribuita, determinare in base ai dati raccolti un intervallo di confidenza al 97% per il voto medio μ di tutti gli studenti del liceo.

Soluzione.

- $\bar{x} = 5.52$; moda = 6; $\tilde{x} = 6$; $s^2 \approx 2.36$; $s \approx 1.55$.
- $\mu \in (5.28; 5.75)$ al 97%.