

Matematica ed Informatica+Fisica
ESERCIZI Modulo di Matematica ed Informatica
Corso di Laurea in Farmacia - anno acc. 2012/2013
docente: Giulia Giantesio, gntgli@unife.it

ESERCIZI STILE ESAME

Esercizi sulla Probabilità

Esercizio 1. In un ufficio il lavoro viene svolto nelle seguenti percentuali: il 30% dal signor X , il 25% dal signor Y e il 45% dal signor Z . Si sa che ogni pratica è preparata da un solo impiegato e che le pratiche preparate dai signori X , Y , Z contengono rispettivamente lo 0,01%, lo 0,005% e lo 0,003% di errori. Se una pratica presenta errori, qual è la probabilità che sia stata preparata dal signor X ? Se una pratica presenta errori, qual è la probabilità che sia stata preparata dal signor Z ?

Soluzione. Sia A l'evento che vi siano errori nella pratica. Abbiamo che $P(X|A) \approx 0,536$ e $P(Z|A) \approx 0,241$.

Esercizio 2. Tre commissioni d'esame bocchiano in media con la seguente frequenza: la prima il 20% degli studenti, la seconda il 40% degli studenti, la terza il 65% degli studenti. Sapendo che uno studente è stato bocciato (B), qual è la probabilità che sia stato esaminato dalla terza commissione? Sapendo che uno studente è stato promosso (P), qual è la probabilità che sia stato esaminato dalla terza commissione?

Soluzione. Abbiamo che $P(B|I) = 0,2$, $P(B|II) = 0,4$, $P(B|III) = 0,65$ e $P(I) = P(II) = P(III) = \frac{1}{3}$. Dunque, applicando il Teorema di Bayes, si ha $P(III|B) = 0,52$; $P(III|P) = 0,20$.

Esercizio 3. Un'indagine medica ha stabilito che l'1% della popolazione è portatrice di una malattia. Si sa che un esame del sangue ha una precisione dell'85% nello stabilire la presenza o l'assenza della malattia: se una persona è portatrice della malattia la probabilità che il test sia positivo è 0,85, oppure se una persona non è portatrice della malattia la probabilità che il test sia negativo è 0,85. Scelta una persona a caso

- a) qual è la probabilità che il test sia positivo?
- b) se il test è positivo, qual è la probabilità che la persona sia portatrice o meno della malattia?

Soluzione. Siano B l'evento che la persona sia portatrice della malattia, $\Omega \setminus B$ l'evento che la persona non sia portatrice della malattia, T_P l'evento che il test sia positivo e T_N l'evento che il test sia negativo. Per ipotesi abbiamo che

$$P(B) = 0,01 \quad P(T_P|B) = P(T_N|(\Omega \setminus B)) = 0,85.$$

- a) La probabilità che il test sia positivo è $P(T_P) = 15,7\%$ (applicando la legge delle alternative e tenendo presente che $P(T_P | (\Omega \setminus B)) = 1 - P(T_N | (\Omega \setminus B)) = 1 - 0,85 = 0,15$).
- b) Se il test è positivo, la probabilità che la persona sia portatrice della malattia è $P(B|T_P) \approx 5,4\%$ (applicando il Teorema di Bayes), mentre la probabilità che la persona non sia portatrice della malattia è $P((\Omega \setminus B)|T_P) = 1 - P(B|T_P) \approx 94,6\%$.

Da questi risultati, poiché è molto bassa la probabilità di rivelare un vero portatore della malattia o è molto alta la probabilità di rivelare un falso portatore, deduciamo che l'esame del sangue considerato è poco affidabile.

Esercizio 4. Un'indagine medica su una malattia ha fornito i seguenti dati: la malattia è presente nell'1% della popolazione; la probabilità che, se una persona è malata, il test risulti positivo è $P(T_P|M) = 80\%$; la probabilità che, se una persona è sana, il test risulti positivo è $P(T_P|S) = 10\%$. Scelta una persona a caso, qual è la probabilità che il test risulti positivo? Qual è la probabilità che, se il test risulta positivo, la persona è malata? Qual è la probabilità che, se il test risulta positivo, la persona è sana?

Soluzione. $P(T_P) = 10,7\%$; $P(M|T_P) \approx 7,5\%$; $P(S|T_P) \approx 92,5\%$. Questi ultimi dati sorprendenti sono dovuti al fatto che la malattia è abbastanza rara.

Esercizio 5. Una certa malattia colpisce il 4% degli italiani. Un test clinico ha fornito i seguenti dati: la probabilità che, se una persona è malata, il test risulti positivo è il 90%, mentre il test risulta positivo su soggetti sani nel 5% dei casi. Qual è la probabilità di non soffrire della malattia per una persona il cui test è risultato positivo?

Soluzione. $P \approx 57,1\%$.

Esercizio 6. Nel periodo natalizio tre ragazzi lavorano in un grande magazzino per impacchettare i regali. Riccardo prepara il 40% dei pacchetti, Elena impacchetta il 38% dei regali e Giovanni prepara i pacchi rimanenti. Sappiamo che la probabilità che un pacco preparato da Riccardo abbia l'etichetta del prezzo è 0,76%, la probabilità che un pacco preparato da Elena non abbia l'etichetta del prezzo è 79,76%, infine la probabilità che un pacco preparato da Giovanni non abbia l'etichetta del prezzo è 62%. Qual è la probabilità che ad un regalo acquistato ed impacchettato in questo grande magazzino non sia stata tolta l'etichetta del prezzo? Si supponga che un cliente scopra che ad un regalo da lui fatto ad amici ed impacchettato nel grande magazzino, non era stata tolta l'etichetta del prezzo. Qual è la probabilità che quel pacco sia stato impacchettato da Riccardo?

Soluzione. Sia A l'evento che si verifica se ad un regalo impacchettato non sia stata tolta l'etichetta del prezzo e sia R l'evento che si verifica se il regalo è stato impacchettato da Riccardo, allora abbiamo che $P(A) \approx 16,36\%$ e $P(R|A) \approx 1,86\%$.

Esercizio 7. In una comunità il 10% degli individui con oltre 50 anni ha il diabete. La probabilità che un medico diagnostichi il diabete ad un individuo effettivamente malato è il 92%, mentre la probabilità che egli diagnostichi il diabete ad un individuo sano è il 3%. Qual è la probabilità che questo medico ad un adulto di oltre 50 anni scelto casualmente nella comunità diagnostichi il diabete? Supponendo che ad un individuo di oltre 50 anni della comunità il medico abbia diagnosticato il diabete, qual è la probabilità che non sia malato?

Soluzione. Sia D l'evento che si verifica se il medico diagnostica il diabete ad un adulto di oltre 50 anni della comunità e sia S l'evento che si verifica se un adulto di oltre 50 anni della comunità sia sano, allora abbiamo che $P(D) \approx 11,9\%$ e $P(S|D) \approx 22,69\%$.

Esercizio 8. I laureati presso l'Università della città di XYZ nell'a.a. 2009-2010 si suddividono nelle seguenti percentuali: il 44% sono laureati in Ingegneria, il 36% in Farmacia e il rimanente in Filosofia. Sappiamo che le probabilità che un laureato in Ingegneria, Farmacia e Filosofia trovi lavoro entro un anno sono rispettivamente 90%, 76% e 49%. Qual è la probabilità che un laureato presso l'Università della città di XYZ nell'a.a. 2009-2010 trovi lavoro entro un anno? Sapendo che un laureato presso l'Università della città di XYZ nell'a.a. 2009-2010 ha trovato lavoro entro un anno, qual è la probabilità che sia laureato in Farmacia? Sapendo che un laureato presso l'Università della città di XYZ nell'a.a. 2009-2010 NON ha trovato lavoro entro un anno, qual è la probabilità che sia laureato in Filosofia?

Soluzione. Siano A, B, C gli eventi che si verificano rispettivamente se uno studente è laureato in Farmacia, in Filosofia e in Ingegneria. Sia L l'evento che si verifica se un laureato trova lavoro entro un anno dalla laurea e sia \bar{L} il suo complementare. Abbiamo che $P(L) \approx 76,76\%$, $P(A|L) \approx 35,64\%$, $P(B|\bar{L}) \approx 43,89\%$.

Esercizio 9. Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si produce il rimanente dei pezzi e il 5% di questi sono difettosi. Qual è la probabilità che un pezzo prodotto dall'azienda sia difettoso? Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A ? Sapendo che un pezzo NON è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento C ?

Soluzione. Sia D l'evento che si verifica se un pezzo prodotto dall'azienda è difettoso e sia \bar{D} il suo complementare. Abbiamo che $P(D) \approx 8,16\%$, $P(A|D) \approx 61,27\%$, $P(C|\bar{D}) \approx 17,24\%$.

Esercizi sulla Statistica Descrittiva

Esercizio 10. Si sono pesate 25 confezioni di pasta di semola di grano duro da 500 g per verificare i pesi effettivi. Si sono ottenuti i seguenti dati:

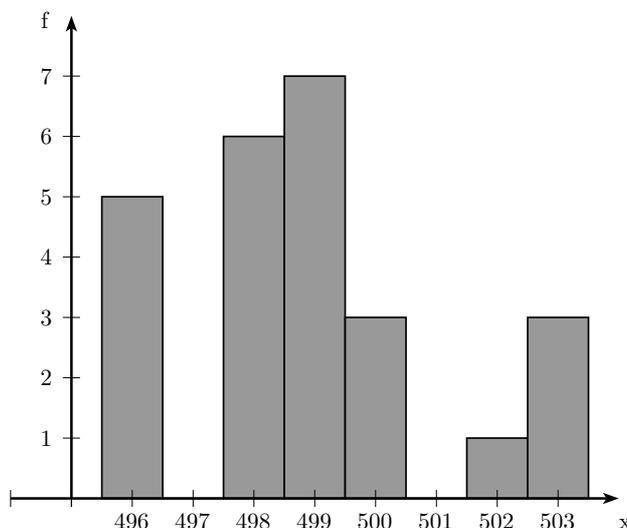
499, 498, 503, 502, 496, 499, 500, 503,
500, 498, 499, 500, 496, 499, 498, 503, 496,
499, 499, 496, 499, 498, 498, 496, 498

- Sistemare i dati in una tabella (che rappresenta la distribuzione di frequenza) e disegnare l'istogramma delle osservazioni.
- Determinare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico medio del peso delle confezioni.
- Determinare la percentuale delle confezioni con peso inferiore a 500 grammi.

Soluzione.

- Tabella della distribuzione delle frequenze:

$x = \text{Peso}$	Frequenza Assoluta	Frequenza Relativa	Frequenza Percentuale
496	5	0,2	20%
498	6	0,24	24%
499	7	0,28	28%
500	3	0,12	12%
502	1	0,04	4%
503	3	0,12	12%
	25	1	100%



b) La media è

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 496 + 6 \cdot 498 + 7 \cdot 499 + 3 \cdot 500 + 1 \cdot 502 + 3 \cdot 503}{25} = 498,88.$$

La moda è il peso con la maggior frequenza, quindi 499.

Per determinare la mediana dobbiamo disporre prima di tutto i dati in ordine crescente. Poiché tali dati sono 25 (numero dispari), dobbiamo prendere il valore che sta nella posizione centrale, ossia nella 13-esima. Abbiamo così $\tilde{x} = 499$.

La varianza è

$$s^2 = \frac{1}{24} \left[5 \cdot (496 - 498,88)^2 + 6 \cdot (498 - 498,88)^2 + 7 \cdot (499 - 498,88)^2 + \right. \\ \left. + 3 \cdot (500 - 498,88)^2 + 1 \cdot (502 - 498,88)^2 + 3 \cdot (503 - 498,88)^2 \right] = 4,61.$$

Lo scarto quadratico medio è $s = \sqrt{s^2} \approx 2,15$.

c) Le confezioni con peso inferiore a 500 g sono 18, quindi in percentuale sono

$$\frac{18}{25} = 0,72 = 72\%.$$

Esercizio 11. È stato fatto un test di verifica sul peso in grammi di 20 confezioni di una determinata pomata. I dati ottenuti sono:

36 38 33 36 32 35 38 32 33 35
33 36 35 35 32 33 33 35 35 32

a) Sistemare i dati in una tabella (che rappresenta la distribuzione di frequenza) e disegnare l'istogramma delle osservazioni.

- b) Determinare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico medio del peso dei prodotti.
 c) Determinare la percentuale dei prodotti con peso inferiore a 35 grammi.

Soluzione.

- b) $\bar{x} = 34,5$; moda = 35; $\tilde{x} = \frac{35 + 35}{2} = 35$ (i dati sono 20, numero pari, quindi, una volta sistemati i dati in ordine crescente, la mediana è la media aritmetica tra i dati in decima e undicesima posizione); $s^2 = 3,607894737$; $s \approx 1,899446$.
 c) 45%.

Esercizio 12. Si sono pesate 25 confezioni di crema solare da 80 g per verificare i pesi effettivi. Si sono ottenuti i seguenti dati:

79, 77, 81, 81, 76, 79, 79, 83,
 80, 77, 77, 80, 76, 79, 77, 77, 76,
 79, 77, 76, 79, 77, 81, 77, 81

- a) Sistemare i dati in una tabella (che rappresenta la distribuzione di frequenza) e disegnare l'istogramma delle osservazioni.
 b) Determinare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico medio del peso delle confezioni.
 c) Determinare la percentuale delle confezioni con peso maggiore o uguale a 80 grammi.

Soluzione.

- b) $\bar{x} = 78,44$; moda = 77; $\tilde{x} = 79$; $s^2 = 3,923333$; $s \approx 1,980741$.
 c) 28%.

Esercizio 13. Si sono esaminate 30 confezioni di una crema per le mani il cui peso varia da 60 g a 65 g per verificare i pesi effettivi. Si sono ottenuti i seguenti dati:

61, 63, 64, 60, 61, 63, 63, 65, 65, 64
 61, 63, 65, 60, 62, 62, 62, 64, 63, 62,
 62, 61, 62, 63, 62, 63, 62, 65, 62, 62

- a) Sistemare i dati in una tabella (che rappresenta la distribuzione di frequenza) e disegnare l'istogramma delle osservazioni.
 b) Determinare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico medio del peso delle confezioni.
 c) Determinare la percentuale delle confezioni con peso maggiore a 62 grammi.

Soluzione.

- b) $\bar{x} = 62,57$; moda = 62; $\tilde{x} = 62$; $s^2 = 1,98$; $s \approx 1,4$.
 c) 46,7%.

Esercizio 14. Di seguito sono riportati i numeri di lavoratori assenti da un'azienda in 50 giorni lavorativi:

13	5	13	37	10	16	2	11	6	12
8	21	12	11	7	7	9	16	49	18
3	11	19	6	15	10	14	10	7	24
11	3	6	10	4	6	32	9	12	7
29	12	9	19	8	20	15	5	17	10

- a) Costruire la tabella della distribuzione delle frequenze assolute suddividendo i dati in 6 classi.
 b) Rappresentare le frequenze assolute tramite un istogramma.
 c) Costruire quindi la tabella della distribuzione delle frequenze percentuali.
 d) Rappresentare le frequenze percentuali in un grafico a torta.

Esercizio 15. Si sono rilevate per 80 volte, in una data unità di misura, le emissioni giornaliere di un gas inquinante da un impianto industriale, ottenendo i seguenti dati:

15.8	22.7	26.8	19.1	18.5	14.4	8.3	25.9	26.4	9.8	22.7	15.2	23.0	29.6
21.9	10.5	17.3	6.2	18.0	22.9	24.6	19.4	12.3	15.9	11.2	14.7	20.5	26.6
20.1	17.0	22.3	27.5	23.9	17.5	11.0	20.4	16.2	20.8	13.3	18.1	24.8	26.1
20.9	21.4	18.0	24.3	11.8	17.9	18.7	12.8	15.5	19.2	7.7	22.5	19.3	9.4
13.9	28.6	19.4	21.6	13.5	24.6	20.0	24.1	9.0	17.6	16.7	16.9	23.5	18.4
25.7	20.1	13.2	23.7	10.7	19.0	14.5	18.1	31.8	28.5				

- a) Suddividere i dati in 7 classi di ampiezza 4, partendo dal valore 5.0, e costruire la tabella della distribuzione delle frequenze.
 b) Tracciare l'istogramma relativo alle frequenze assolute.
 c) Calcolare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico medio.

Soluzione.

- a) Tabella della distribuzione delle frequenze:

Classi	$x = \text{Val. centrale}$	Freq. Assoluta	Freq. Relativa	Freq. Percentuale
$5.0 < x \leq 9.0$	7.0	4	0.05	5%
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

- c) $\bar{x} = 18.8$; $\tilde{x} = 19$; $s^2 \approx 31.95949$; $s \approx 5.65327$.

Esercizio 16. Si sono misurati in cm i diametri di 80 sbarre di acciaio, ottenendo i seguenti dati:

4.81 4.88 4.61 4.75 4.79 4.60 4.64 4.67 4.55 4.61 4.89 4.73 4.59 4.73
 4.78 4.74 4.36 4.71 4.67 4.86 4.60 4.92 4.58 4.82 4.66 4.76 4.51 4.45
 4.75 4.65 4.70 4.61 4.71 4.55 4.56 4.85 4.31 4.52 4.58 4.68 4.69 4.48
 4.78 4.43 4.57 4.44 4.55 4.72 4.52 4.68 4.63 4.53 4.69 4.97 4.71 4.66
 4.57 4.44 4.62 4.42 4.70 4.53 4.69 4.77 4.49 4.70 4.54 4.50 4.86 4.95
 4.50 4.70 4.64 4.82 4.59 4.65 4.51 4.77 4.66 4.77

- Suddividere i dati in 7 classi di ampiezza 0.1, partendo dal valore 4.30, e costruire la tabella della distribuzione delle frequenze.
- Tracciare l'istogramma relativo alle frequenze assolute.
- Calcolare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico medio.

Soluzione.

- Tabella della distribuzione delle frequenze:

Classi	$x =$ Val. centrale	Freq. Assoluta	Freq. Relativa	Freq. Percentuale
$4.30 < x \leq 4.40$	4.35	2	0.025	2.5%
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

- $\bar{x} = 4.6475$; $\tilde{x} = 4.65$; $s^2 \approx 0.01873$; $s \approx 0.13685$.

Esercizio 17. Si sono rilevati i pesi in hg di 100 neonati nati nel mese di dicembre 2011 all'ospedale di Ferrara, ottenendo i seguenti dati:

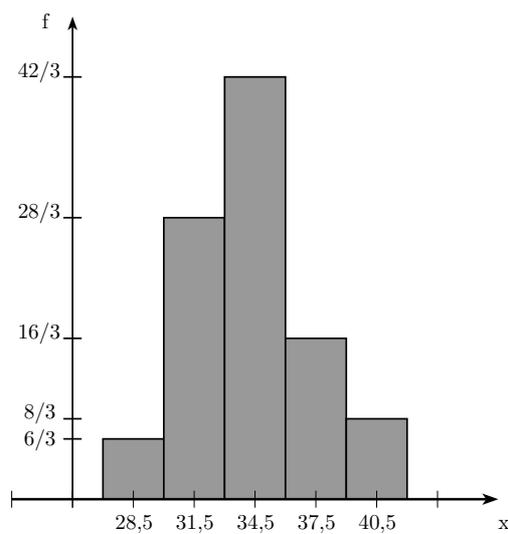
$x =$ Peso in hg	Numero di neonati
$27 < x \leq 30$	6
$30 < x \leq 33$	28
$33 < x \leq 36$	42
$36 < x \leq 39$	16
$39 < x \leq 42$	8

- Sistemare i dati nella tabella di distribuzione delle frequenze, specificando il valore centrale con cui si identifica ogni classe e disegnare l'istogramma delle osservazioni.
- Determinare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico del peso dei neonati.

Soluzione.

- Tabella della distribuzione delle frequenze e istogramma:

$x =$ Valore centrale	Frequenza Assoluta	Frequenza Relativa	Frequenza Percentuale
28,5	6	0,06	6%
31,5	28	0,28	28%
34,5	42	0,42	42%
37,5	16	0,16	16%
40,5	8	0,08	8%
	100	1	100%



b) La media è

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 28,5 + 28 \cdot 31,5 + 42 \cdot 34,5 + 16 \cdot 37,5 + 8 \cdot 40,5}{100} = 34,26.$$

La moda è il peso con la maggior frequenza, quindi 34,5.

Per determinare la mediana dobbiamo disporre prima di tutto i dati in ordine crescente. Poiché tali dati sono 100 (numero pari), dobbiamo fare la media aritmetica tra i valori che stanno nella 50-esima e 51-esima posizione (essi valgono entrambi 34,5). Abbiamo così $\tilde{x} = 34,5$.

La varianza è

$$s^2 = \frac{1}{99} \left[6 \cdot (28,5 - 34,26)^2 + 28 \cdot (31,5 - 34,26)^2 + 42 \cdot (34,5 - 34,26)^2 + 16 \cdot (37,5 - 34,26)^2 + 8 \cdot (40,5 - 34,26)^2 \right] \approx 9,03273.$$

Lo scarto quadratico medio è $s = \sqrt{s^2} \approx 3,00545$.

Esercizio 18. Si sono rilevati i pesi in Kg di un gruppo di 200 persone, ottenendo i seguenti dati:

$x =$ Peso in Kg	Numero di persone
$59 < x \leq 62$	12
$62 < x \leq 65$	29
$65 < x \leq 68$	47
$68 < x \leq 71$	50
$71 < x \leq 74$	42
$74 < x \leq 77$	18
$77 < x \leq 80$	2

- Sistemare i dati nella tabella di distribuzione delle frequenze, specificando il valore centrale con cui si identifica ogni classe e disegnare l'istogramma delle osservazioni.
- Determinare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico del peso delle persone.
- Determinare la percentuale delle persone che pesano meno di 64 Kg.

Soluzione. b) $\bar{x} = 68,645$; moda = 69,5; $\tilde{x} = 69,5$; $s^2 \approx 17,49$; $s \approx 4,18$.
c) 20,5%.

Esercizio 19. Si sono rilevate le età dei 100 dipendenti di un'azienda, ottenendo i seguenti dati:

$x =$ Età	Numero di dipendenti
$29 < x \leq 32$	6
$32 < x \leq 35$	18
$35 < x \leq 38$	27
$38 < x \leq 41$	30
$41 < x \leq 44$	15
$44 < x \leq 47$	3
$47 < x \leq 50$	1

- Sistemare i dati nella tabella di distribuzione delle frequenze, specificando il valore centrale con cui si identifica ogni classe e disegnare l'istogramma delle osservazioni.
- Determinare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico dell'età dei dipendenti.
- Determinare la percentuale dei dipendenti che hanno più di 45 anni.

Soluzione. b) $\bar{x} = 37,79$; moda = 39,5; $\tilde{x} = 36,5$; $s^2 \approx 14,23$; $s \approx 3,77$.
c) 4%.