**Matematica ed Informatica+Fisica**
**ESERCIZI Modulo di Matematica ed Informatica**
Corso di Laurea in Farmacia - anno acc. 2012/2013
docente: Giulia Giantesio, gntgli@unife.it

## Esercizi 6: Derivata di una funzione e sue applicazioni

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni.

***Esercizio*** 1. $f(x) = 3x + 4\ln x - 2e^x + 3\cos x$

***Soluzione.***

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot D(x) + 4 \cdot D(\ln x) - 2 \cdot D(e^x) + 3 \cdot D(\cos x) = \\ &= 3 + 4 \cdot \frac{1}{x} - 2\,e^x + 3 \cdot (-\sin x) = \\ &= 3 + \frac{4}{x} - 2\,e^x - 3\,\sin x \end{aligned}$$

***Esercizio*** 2. $f(x) = 4x + 2\ln x - 3e^x - 5\,\sin x$

***Esercizio*** 3. $f(x) = x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 3x - 1$

***Esercizio*** 4. $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - e^{2x} + \ln x$

***Esercizio*** 5. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 4$

***Esercizio*** 6. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 - 3x + 1$

***Esercizio*** 7. $f(x) = x^4 + \sqrt[3]{x} - \ln x + e^x - \mathrm{arctg}\ x$

***Soluzione.*** Abbiamo $f(x) = x^4 + x^{\frac{1}{3}} - \ln x + e^x - \mathrm{arctg}\ x$, quindi

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\,x^3 + \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x} + e^x - \frac{1}{1+x^2} = \\ &= 4\,x^3 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x} + e^x - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

***Esercizio*** 8. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

***Soluzione.*** Abbiamo $f(x) = x^{-1} + x^{-3} - x^{-4}$, quindi

$$f'(x) = -x^{-2} - 3x^{-4} - (-4x^{-5}) = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$$

***Esercizio*** 9. $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}$

***Esercizio*** 10. $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$

***Esercizio*** 11. $f(x) = \sqrt[5]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

***Esercizio*** 12. $f(x) = (x^3 + 2x^2 + x) \cdot \ln x$

***Soluzione.*** Per la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(D(x^3 + 2x^2 + x)\Big) \cdot \ln x + (x^3 + 2x^2 + x) \cdot D(\ln x) = \\ &= (3x^2 + 4x + 1) \cdot \ln x + (x^3 + 2x^2 + x) \cdot \frac{1}{x} = \\ &= (3x^2 + 4x + 1) \cdot \ln x + x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

***Esercizio*** 13. $f(x) = (x^3 - x^2 + 2x) \cdot \sin x$

***Esercizio*** 14. $f(x) = (3x - 2) \cdot (x^2 + 4x - 3)$

***Esercizio*** 15. $f(x) = (2x + 3) \cdot (x^2 + 3x - 1)$

***Esercizio*** 16. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$

***Soluzione.*** Per la regola di derivazione del rapporto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\Big(D(x^2 - 3x + 5)\Big) \cdot (x^2 - 1) - (x^2 - 3x + 5) \cdot D(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{(2x - 3) \cdot (x^2 - 1) - (x^2 - 3x + 5) \cdot (2x)}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 - 2x - 3x^2 + 3 - 2x^3 + 6x^2 - 10x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^2 - 12x + 3}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

***Esercizio*** 17. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2\ln x}{x}$

***Esercizio*** 18. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2}$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{2(x^2 - 7x + 2)}{(x^2 - 2)^2}$

***Esercizio*** 19. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3\cos x}{x}$

***Esercizio*** 20. $f(x) = (x^2 - 3x - 5) \cdot (3x^2 - 2x + 1) + \dfrac{x^2 + 1}{3(x^2 - 1)}$

***Soluzione.*** $f'(x) = 12x^3 - 33x^2 - 16x + 7 - \dfrac{4x}{3(x^2 - 1)^2}$

***Esercizio*** 21. $f(x) = \dfrac{(2x^2 - x) \cdot \ln x}{x^2 - x - 2}$

***Soluzione.*** Dobbiamo applicare la regola di derivazione del rapporto, tenendo presente che il numeratore è un prodotto:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{[D((2x^2 - x) \cdot \ln x)] \cdot (x^2 - x - 2) - [(2x^2 - x) \cdot \ln x] \cdot [D(x^2 - x - 2)]}{(x^2 - x - 2)^2} = \\
&= \frac{[(4x - 1) \cdot \ln x + (2x^2 - x) \cdot \frac{1}{x}] \cdot (x^2 - x - 2) - [(2x^2 - x) \cdot \ln x] \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \\
&= \frac{[(4x - 1) \cdot \ln x + (2x - 1)] \cdot (x^2 - x - 2) - (4x^3 - 4x^2 + x) \cdot \ln x}{(x^2 - x - 2)^2} = \\
&= \frac{(4x^3 - 5x^2 - 7x + 2) \cdot \ln x + (2x^3 - 3x^2 - 3x + 2) - (4x^3 - 4x^2 + x) \cdot \ln x}{(x^2 - x - 2)^2} = \\
&= \frac{(-x^2 - 8x + 2) \cdot \ln x + 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}{(x^2 - x - 2)^2}.
\end{aligned}$$

***Esercizio*** 22. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4}$

***Soluzione.*** $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2 + 4x + 4} = -\dfrac{1}{(x + 2)^2}$

***Esercizio*** 23. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 6x + 9}$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{x + 7}{(x + 3)^3}$

***Esercizio*** 24. $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^5$

***Soluzione.*** Dobbiamo applicare la regola di derivazione della funzione composta:

$$D[f(x)^n] = n\, f(x)^{n-1} \cdot f'(x);$$

dunque

$$f'(x) = 5\,(3x^2 - 2x + 1)^4 \cdot [D(3x^2 - 2x + 1)] = 5\,(3x^2 - 2x + 1)^4 \cdot (6x - 2).$$

***Esercizio*** 25. $f(x) = (7x^3 - 2x^2 + 3x)^4$

***Esercizio*** 26. $f(x) = \cos^5 x$

***Esercizio*** 27. $f(x) = \ln^3 x$

***Esercizio*** 28. $f(x) = (x^2 - 5x + 6)^7$

***Esercizio*** 29. $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$

***Soluzione.*** $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

***Esercizio*** 30. $f(x) = \sqrt{3x - x^2} - 4x$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{3 - 2x}{2\sqrt{3x - x^2}} - 4$

***Esercizio*** 31. $f(x) = x - \sqrt[3]{4 - x^2}$

***Soluzione.*** Abbiamo che:

$$f'(x) = D(x) - D(\sqrt[3]{4 - x^2}) = 1 - D(\sqrt[3]{4 - x^2}).$$

Dobbiamo applicare la regola di derivazione della funzione composta:

$$D\sqrt[3]{f(x)} = \frac{1}{3\sqrt{(f(x))^2}} \cdot f'(x);$$

dunque

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{3\sqrt{(4 - x^2)^2}} \cdot D(4 - x^2) = 1 - \frac{1}{3\sqrt{(4 - x^2)^2}} \cdot (-2x) = \\ &= 1 + \frac{2x}{3\sqrt{(4 - x^2)^2}}. \end{aligned}$$

***Esercizio*** 32. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{3x - 1}}$

***Soluzione.*** Dobbiamo applicare la regola di derivazione della funzione composta:

$$D\sqrt{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x);$$

dunque

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-1}}} \cdot \left[D\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)\right] = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-1}}} \cdot \frac{1 \cdot (3x - 1) - (x + 1) \cdot 3}{(3x - 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-1}}} \cdot \frac{-4}{(3x - 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-1}}} \cdot \frac{-2}{(3x - 1)^2}. \end{aligned}$$

***Esercizio*** 33. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+7}{8-x}}$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x+7}{8-x}}} \cdot \dfrac{31}{(8-x)^2}$

***Esercizio*** 34. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-9}{1-x}}$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-9}{1-x}}} \cdot \dfrac{-7}{(1-x)^2}$

***Esercizio*** 35. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{3-9x}}$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+4}{3-9x}}} \cdot \dfrac{39}{(3-9x)^2}$

***Esercizio*** 36. $f(x) = e^{3+4x-x^2}$

***Soluzione.*** Dobbiamo applicare la regola di derivazione della funzione composta:

$$D\, e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x);$$

dunque

$$f'(x) = e^{3+4x-x^2} \cdot D(3+4x-x^2) = e^{3+4x-x^2} \cdot (4-2x) = 2 \cdot (2-x) \cdot e^{3+4x-x^2}.$$

***Esercizio*** 37. $f(x) = e^{\frac{4x+1}{x^2-2}}$

***Soluzione.*** Dobbiamo applicare la regola di derivazione della funzione composta:

$$D\, e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x);$$

dunque

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{4x+1}{x^2-2}} \cdot D\left(\frac{4x+1}{x^2-2}\right) = e^{\frac{4x+1}{x^2-2}} \cdot \frac{4 \cdot (x^2-2) - (4x+1) \cdot (2x)}{(x^2-2)^2} = \\ &= e^{\frac{4x+1}{x^2-2}} \cdot \frac{4x^2 - 8 - 8x^2 - 2x}{(x^2-2)^2} = e^{\frac{4x+1}{x^2-2}} \cdot \frac{-4x^2-2x-8}{(x^2-2)^2}. \end{aligned}$$

***Esercizio*** 38. $f(x) = e^{\frac{x^2+5}{x+1}}$

***Soluzione.*** $f'(x) = e^{\frac{x^2+5}{x+1}} \cdot \dfrac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$

***Esercizio*** 39. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

***Soluzione.*** $f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \dfrac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}$

***Esercizio*** 40. $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^3}$

***Soluzione.*** $f'(x) = e^{-x^3} \cdot (3x^2 - 3x^5)$

***Esercizio*** 41. $f(x) = \ln(2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1)$

***Soluzione.*** Dobbiamo applicare la regola di derivazione della funzione composta:

$$D \ln(f(x)) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x);$$

dunque

$$f'(x) = \frac{1}{2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1} \cdot D(2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1) =$$
$$= \frac{1}{2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1} \cdot (8x^3 - 18x^2 + 2x - 5) = \frac{8x^3 - 18x^2 + 2x - 5}{2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1}.$$

***Esercizio*** 42. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

***Esercizio*** 43. $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x + 4}{x - 3}\right)$

***Soluzione.***

$$f'(x) = \frac{-19}{(5x + 4) \cdot (x - 3)}.$$

***Esercizio*** 44. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3 - x}{2x - 10}\right)$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{2}{(3 - x) \cdot (x - 5)}$

***Esercizio*** 45. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 9}{1 - 4x}\right)$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 2x - 36}{(x^2 - 9) \cdot (1 - 4x)}$

***Esercizio*** 46. $f(x) = \ln\left(\dfrac{4 - x^2}{3x + 1}\right)$

***Soluzione.*** $f'(x) = \dfrac{-3x^2 - 2x - 12}{(4 - x^2) \cdot (3x + 1)}$

***Esercizio*** 47. $f(x) = (\sin x^4) \cdot (\cos \sqrt{x})$

***Soluzione.*** Abbiamo:

$$f'(x) = [D(\sin x^4)] \cdot \cos \sqrt{x} + \sin x^4 \cdot [D(\cos \sqrt{x})].$$

Dobbiamo applicare le regole di derivazione delle funzioni composte:

$$D \sin(f(x)) = \cos(f(x)) \cdot f'(x); \qquad D \cos(f(x)) = -\sin(f(x)) \cdot f'(x);$$

dunque

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(\cos x^4) \cdot D(x^4)] \cdot \cos \sqrt{x} + \sin x^4 \cdot [(-\sin \sqrt{x}) \cdot D(\sqrt{x})] = \\ &= 4x^3 \cdot \cos x^4 \cdot \cos \sqrt{x} + \sin x^4 \cdot [(-\sin \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}] = \\ &= 4x^3 \cdot \cos x^4 \cdot \cos \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x^4 \cdot \sin \sqrt{x}. \end{aligned}$$

***Esercizio*** 48. $f(x) = \sin \sqrt[3]{x} + \cos 2x$

***Soluzione.***

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \cos \sqrt[3]{x} - 2 \sin 2x.$$

***Esercizio*** 49. $f(x) = \sin \left( \dfrac{3x - 2}{2x + 7} \right)$

***Soluzione.*** $f'(x) = \cos \left( \dfrac{3x - 2}{2x + 7} \right) \cdot \dfrac{25}{(2x + 7)^2}$

***Esercizio*** 50. $f(x) = \cos \left( \dfrac{x - 2}{5x + 9} \right)$

***Soluzione.*** $f'(x) = -\sin \left( \dfrac{x - 2}{5x + 9} \right) \cdot \dfrac{19}{(5x + 9)^2}$

***Esercizio*** 51. $f(x) = \ln(\ln x)$

***Soluzione.*** Abbiamo:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot [D(\ln x)] = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}.$$

***Esercizio*** 52. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+3x+1}}$

***Soluzione.*** Abbiamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot [D(\sqrt{x^2+3x+1})] = \\ &= e^{\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot [D(x^2+3x+1)] = \\ &= e^{\sqrt{x^2+3x+1}} \cdot \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}. \end{aligned}$$

***Esercizio*** 53. $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+4)}$

***Soluzione.*** Abbiamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+4)}} \cdot D[\ln(x^2+4)] = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+4)}} \cdot \frac{1}{x^2+4} \cdot D(x^2+4) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+4)}} \cdot \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x = \frac{1}{\sqrt{\ln(x^2+4)}} \cdot \frac{x}{x^2+4}. \end{aligned}$$

***Esercizio*** 54. $f(x) = \ln(\sqrt{\cos x})$

***Soluzione.*** $f'(x) = -\dfrac{\text{tg } x}{2}$

## Massimi, minimi di una funzione

Dopo aver determinato il dominio, studiare il segno della derivata prima delle seguenti funzioni, scrivere gli intervalli in cui esse sono strettamente crescenti o decrescenti e determinare eventuali punti di massimo $x_M$ o minimo $x_m$ relativi.

***Esercizio*** 1. $f(x) = x^3 - 3x + 7$

***Soluzione.*** $x_m = 1$; $x_M = -1$

***Esercizio*** 2. $f(x) = 3x^3 - 27x^2 + 1$

***Soluzione.*** $x_m = 6$; $x_M = 0$

***Esercizio*** 3. $f(x) = x \cdot (2-3x)^3$

***Soluzione.*** Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (D\,x) \cdot (2-3x)^3 + x \cdot [D(2-3x)^3] = \\ &= (2-3x)^3 + x \cdot [3(2-3x)^2 \cdot D(2-3x)] = \\ &= (2-3x)^3 + x \cdot [3(2-3x)^2 \cdot (-3)] = \\ &= (2-3x)^3 - 9x \cdot (2-3x)^2 = (2-3x)^2 \cdot (2-12x). \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$(2-3x)^2 \cdot (2-12x) > 0.$$

Abbiamo che

$$(2-3x)^2 > 0 \text{ per ogni } \; x \neq \frac{2}{3};$$

$$2-12x > 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{1}{6};$$

quindi $(2-3x)^2 \cdot (2-12x) > 0$ per $x < \dfrac{1}{6}$.

Possiamo concludere che la funzione $f$ è strettamente crescente per $x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{6}\right[$, mentre $f$ è strettamente decrescente per $x \in \left]\dfrac{1}{6}; \dfrac{2}{3}\right[ \cup \left]\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$.

Inoltre $x = \dfrac{1}{6}$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = \dfrac{2}{3}$ è un punto stazionario che non è né punto di massimo né punto di minimo relativo $\Big($in $x = \dfrac{2}{3}$ la derivata prima si annulla, ma negli intervalli $\left]\dfrac{1}{6}; \dfrac{2}{3}\right[$ e $\left]\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$ non cambia segno$\Big)$.

***Esercizio*** 4. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-5}$

***Soluzione.*** $x_m = 5 + 2\sqrt{7}$; $x_M = 5 - 2\sqrt{7}$

***Esercizio*** 5. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

***Soluzione.*** $x_m = 1$; $x_M = -1$

***Esercizio*** 6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3x-3}$

***Soluzione.*** $x_m = 2$; $x_M = 0$

***Esercizio*** 7. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}$

***Soluzione.*** Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante la regola di derivazione del rapporto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+3)\cdot(x^2+x+1) - (2x^2+3x+2)\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \\ &= \frac{4x^3+7x^2+7x+3-(4x^3+8x^2+7x+2)}{(x^2+x+1)^2} = \\ &= \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} > 0.$$

Abbiamo che

$$\text{Num.} > 0 \;\Rightarrow\; -x^2+1 > 0 \;\Rightarrow\; x^2-1 < 0 \;\Rightarrow\; -1 < x < 1;$$

$$\text{Den.} > 0 \;\Rightarrow\; (x^2+x+1)^2 > 0 \;\Rightarrow\; \text{per ogni } x \in \mathbb{R};$$

quindi $\dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} > 0$ per $-1 < x < 1$.

Possiamo concludere che $f$ è strettamente crescente per $x \in ]-1;1[$, mentre $f$ è strettamente decrescente per $x \in ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

Inoltre $x = -1$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = 1$ è un punto di massimo relativo ($f'$ non solo si annulla in questi due punti, ma cambia anche segno).

***Esercizio*** 8. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

***Soluzione.*** Il dominio della funzione è $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante le regole di derivazione del prodotto e della composizione:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{x-2}} + x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \cdot D\Big(\frac{1}{x-2}\Big) = e^{\frac{1}{x-2}} + x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{-1}{(x-2)^2} =$$
$$= e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \Big(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\Big) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2} > 0.$$

Poiché $e^{\frac{1}{x-2}} > 0$ per ogni $x$ appartenente al dominio, basta porre

$$\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2} > 0.$$

Abbiamo che

$$\text{Num.} > 0 \;\Rightarrow\; x^2-5x+4 > 0 \;\Rightarrow\; x < 1 \vee x > 4;$$

$$\text{Den.} > 0 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 > 0 \;\Rightarrow\; \text{per ogni } x \neq 2;$$

quindi $\dfrac{x^2-5x+4}{(x-2)^2} > 0$ per $x < 1 \vee x > 4$.

Possiamo concludere che $f$ è strettamente crescente per $x \in ]-\infty; 1[ \cup ]4; +\infty[$, mentre $f$ è strettamente decrescente per $x \in ]1; 2[ \cup ]2; 4[$.

Inoltre $x = 1$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 4$ è un punto di minimo relativo.

***Esercizio*** 9. $f(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}}$

***Soluzione.*** $x_m = 2$

***Esercizio*** 10. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

***Soluzione.*** Il dominio della funzione è $]0; +\infty[$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante la regola di derivazione del rapporto:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x) - (\ln x) \cdot (1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} > 0.$$

Abbiamo che

$$\text{Num.} > 0 \;\Rightarrow\; 1 - \ln x > 0 \;\Rightarrow\; \ln x < 1 \;\Rightarrow\; x < e;$$

$$\text{Den.} > 0 \;\Rightarrow\; x^2 > 0 \;\Rightarrow\; \text{per ogni } x \neq 0;$$

poiché il dominio è $]0; +\infty[$, otteniamo che $\dfrac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ per $0 < x < e$.

Possiamo concludere che $f$ è strettamente crescente per $x \in ]0; e[$, mentre $f$ è strettamente decrescente per $x \in ]e; +\infty[$.

Inoltre $x = e$ è un punto di massimo relativo.

## Massimi, minimi e flessi di una funzione

Determinare i punti di massimo $x_M$ e di minimo $x_m$ e gli eventuali punti di flesso $x_F$ delle seguenti funzioni.

***Esercizio*** 1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

***Soluzione.*** $x_M = -1$; $x_m = 2$; $x_F = \dfrac{1}{2}$

***Esercizio*** 2. $f(x) = -x^3 + 18x^2 + 1$

***Soluzione.*** $x_M = 12$; $x_m = 0$; $x_F = 6$

***Esercizio*** 3. $f(x) = x^2 - x^3$

***Soluzione.*** $x_M = \dfrac{2}{3}$; $x_m = 0$; $x_F = \dfrac{1}{3}$

***Esercizio*** 4. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$

***Soluzione.*** $x_M = 0$; $x_m = -2$ $x_m = +2$; $x_F = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $x_F = +\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

***Esercizio*** 5. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

***Soluzione.*** $x_m = 0$; $x_F = -1$; $x_F = 1$

***Esercizio*** 6. $f(x) = x \cdot e^{-x}$

***Soluzione.*** $x_M = 1$; $x_F = 2$