PROVA SCRITTA DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Farmacia a.a. 2012/2013 (Studenti A-L)
3 giugno 2013

1. [punti 12] Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x+3}}{x-2}$$

fino alla derivata seconda e tracciarne il grafico. Indicare gli eventuali punti di minimo, di massimo (relativi o assoluti) e di flesso.

SOLUZIONE:
Classificazione. È una funzione razionale fratta ed esponenziale, poiché la variabile indipendente x compare sia al denominatore della frazione che all'esponente della funzione.

Dominio. Poiché nella funzione compare una frazione, per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il denominatore sia diverso da zero, e pertanto si deve avere:

$$x - 2 \neq 0 \ \Rightarrow \ x \neq 2.$$

Il dominio della funzione é $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

Intersezioni con gli assi. Con l'asse y abbiamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{e^{x+3}}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{e^3}{2} \end{cases}$$

Con l'asse x non abbiamo intersezione perchè $e^{x+3} > 0 \ \forall x \in D_f$.

Pertanto la funzione interseca gli assi cartesiani solamente nel punto di coordinate $A(0; -\frac{e^3}{2})$.

Segno.

$$f(x) > 0 \Rightarrow \ \frac{e^{x+3}}{x-2} > 0$$

$$\text{Num.} > 0 \Rightarrow \ e^{x+3} > 0 \Rightarrow \forall x \in D_f$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow \ x - 2 > 0 \Rightarrow \ x > 2.$$

Ossia

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in]2; +\infty[.$$

Dallo studio del segno si osserva subito che la funzione non presenta particolari simmetrie.
Comportamento della funzione in punti particolari del dominio. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono 2, $-\infty$, $+\infty$.
Abbiamo che:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x+3}}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{x+3}}{x-2} = -\infty$$

Avendo ottenuto due risultati infiniti per x tendente ad un valore finito (da destra e da sinistra), si può concludere che la retta di equazione $x = 2$ è un asintoto verticale per la funzione.

Abbiamo che:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x+3}}{x-2} = +\infty.$$

Mentre si ha:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x+3}}{x-2} = 0.$$

Possiamo concludere che la funzione ammette come asintoto orizzontale la retta $y = 0$ quando $x \to -\infty$.
Non vi sono asintoti obliqui poichè $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Studio della derivata prima. Abbiamo che:

$$f'(x) = \frac{e^{x+3}(x-2) - e^{x+3}}{(x-2)^2} = \frac{e^{x+3}(x-3)}{(x-2)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima: poniamo $f'(x) > 0$, ossia

$$\frac{e^{x+3}(x-3)}{(x-2)^2} > 0,$$

poiché $\frac{e^{x+3}}{(x-2)^2}$ per ogni x appartenente al dominio, è sufficiente porre

$$x - 3 > 0 \;\Rightarrow\; x > 3.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente decrescente per $x \in]-\infty; 3[$, mentre f è strettamente crescente per $x \in]3; +\infty[$.
Inoltre $x = 3$ è un punto di minimo relativo. Il minimo relativo della funzione vale $f(3) = e^6$ (è un estremo relativo poichè la f tende a $-\infty$ a sinistra di 2).

Studio della derivata seconda. Abbiamo che:

$$f''(x) = \frac{e^{x+3}(x-3)(x-2)^2 + e^{x+3}(x-2)^2 - e^{x+3}(x-3)(x-2)2}{(x-2)^4} = \frac{e^{x+3}(x^2-6x+10)}{(x-2)^3}.$$

Studiamo il segno della derivata seconda: poniamo $f''(x) > 0$, ossia

$$\frac{e^{x+3}(x^2-6x+10)}{(x-2)^3},$$

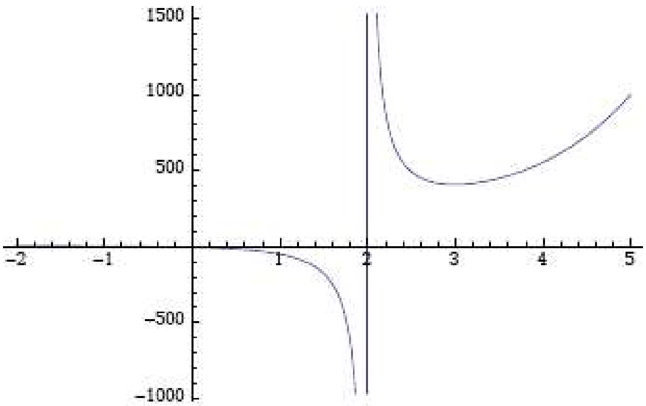
poiché $e^{x+3} > 0$ per ogni x appartenente al dominio,

Num. $> 0 \Rightarrow\; x^2 - 6x + 10 > 0 \Rightarrow \forall x \in D_f$ siccome il delta dell'equazione è negativo e la concavità della parabola è rivolta verso l'alto.

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow\; x - 2 > 0 \Rightarrow\; x > 2.$$

Possiamo concludere che la funzione f volge la concavità verso il basso per $x \in]-\infty; 2[$, mentre f volge la concavità verso l'alto per $x \in]2; +\infty[$.
Poichè $2 \notin D_f$ la funzione non ha punti di flesso.

Grafico.



2. [punti 6] Dopo aver calcolato

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx,$$

spiegare la differenza tra i tre seguenti integrali:

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx, \quad \int_{0}^{1} \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx.$$

SOLUZIONE:
Il denominatore e il numeratore hanno lo stesso grado pertanto occorre prima fare la divisione polinomiale

$$\begin{array}{ccc|cc} x^2 & & -2 & x^2 & -4x \\ \cline{4-5} x^2 & -4x & & 1 & \\ \hline & 4x & -2 & & \end{array}$$

così che

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{4x-2}{x^2-4x}\,dx.$$

Scomponiamo il denominatore:

$$\frac{4x-2}{x^2-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} = \frac{Ax-4A+Bx}{x^2-4x}$$

e dunque

$$\begin{cases} A+B &= 4 \\ -4A &= -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{7}{2} \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx &= \int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-4}\,dx \\ &= x + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{7}{2}\ln|x-4| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

- $\int \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx$ integrale indefinito: consiste nel cercare l'insieme delle primitive della funzione sotto integrale (ovvero tutte quelle funzioni che derivate ci danno la funzione sotto integrale).
- $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx$ integrale definito: determina il valore dell'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione sotto integrale.
- $\int_{0}^{1} \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx$ integrale generalizzato: la funzione sotto integrale in 0 non è definita.

3. [punti 6] È stato rilevato il valore della glicemia a digiuno in 30 pazienti:

glicemia in mg/dl	65	66	67	68	69	70
numero pazienti	2	4	10	7	3	4

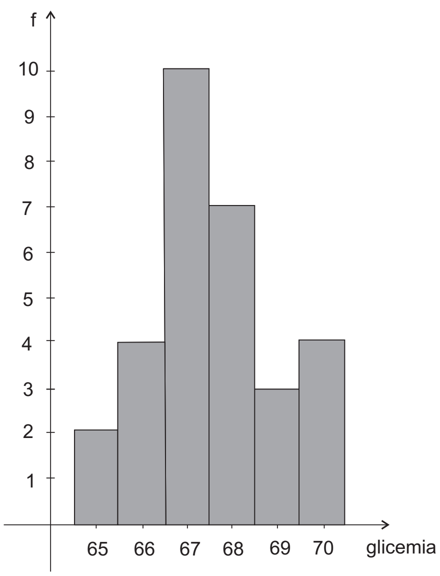
a) Sistemare i dati nella tabella di distribuzione delle frequenze (assoluta, relativa, percentuale) e disegnare l'istogramma delle osservazioni.

b) Determinare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico della glicemia a digiuno dei pazienti.

c) Sapendo che la glicemia a digiuno è una variabile normalmente distribuita, determinare in base ai dati raccolti un intervallo di confidenza al 90% per l'età media μ di tutti i pazienti.

SOLUZIONE:
a)Tabella di distribuzione e istogramma:

glicemia	frequenza assoluta	frequenza relativa	frequenza percentuale
65	2	$\frac{2}{30}$	$\sim 7\%$
66	4	$\frac{4}{30}$	$\sim 14\%$
67	10	$\frac{10}{30}$	$\sim 31\%$
68	7	$\frac{7}{30}$	$\sim 24\%$
69	3	$\frac{3}{30}$	10%
70	4	$\frac{4}{30}$	$\sim 14\%$



b) La media è

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 65 + 4 \cdot 66 + 10 \cdot 67 + 7 \cdot 68 + 3 \cdot 69 + 4 \cdot 70}{30} = 67.5667.$$

La moda è il peso con la maggior frequenza, quindi 67.

Per determinare la mediana dobbiamo disporre prima di tutto i dati in ordine crescente. Poiché tali dati sono 30 (numero pari), la mediana è la media aritmetica tra i dati in quindicesima e sedicesima posizione. Abbiamo così $\widetilde{x} = 67$.
La varianza è

$$s^2 = \frac{1}{30-1}\Big[2 \cdot (65 - 67.5667)^2 + 4 \cdot (66 - 67.5667)^2 + 10 \cdot (67 - 67.5667)^2 + \\ + 7 \cdot (68 - 67.5667)^2 + 3 \cdot (69 - 67.5667)^2 + 4 \cdot (70 - 67.5667)^2\Big] = 1.9782.$$

Lo scarto quadratico medio è $s = \sqrt{s^2} \approx 1.4065$.

c)Sia Z una variabile aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$, dobbiamo trovare z tale che $P(-z < Z < z) = 0.90$.
Poiché $P(-z < Z < z) = 2P(Z < z) - 1$, abbiamo che:

$$2P(Z < z) - 1 = 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad P(Z < z) = \frac{1 + 0.90}{2} = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1.64.$$

Quindi:

$$0.90 = P(-1.64 < Z < 1.64) = P\Big(-1.64 < \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.64 \Big) =$$
$$= P\Big(-1.64 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} - \mu < 1.64 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Big) = P\Big(\overline{x} - 1.64 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + 1.64 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Big) =$$
$$= P\Big(67.5667 - 1.96 \cdot \frac{1.4065}{\sqrt{30}} < \mu < 67.5667 + 1.96 \cdot \frac{1.4065}{\sqrt{30}} \Big) = P(67.1457 < \mu < 67.9867).$$

Dunque $\mu \in (67.1457; 67.9867)$ al 90%.

4. [punti 4] Utilizzando due macchine un'azienda è in grado di ottenere 120 pezzi all'ora di un certo manufatto:

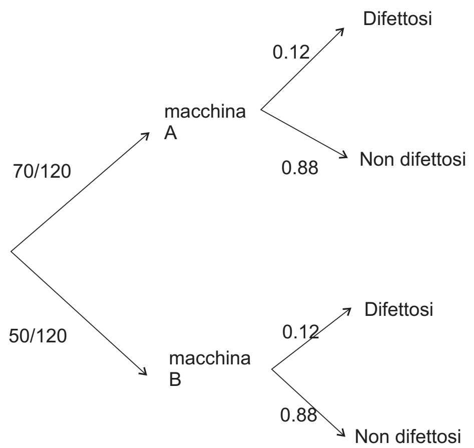
- la macchina A produce 70 pezzi all'ora e la probabilità che fra essi vi siano pezzi difettosi è 0,12;
- la macchina B produce 50 pezzi all'ora e la probabilità che fra essi vi siano pezzi difettosi è 0,12.

Alla fine di un'ora, dai 120 pezzi prodotti in quell'ora se ne estrae uno e si trova che esso è difettoso.

a) Determinare la probabilità che tale pezzo difettoso sia stato prodotto dalla macchina A.

b) Determinare la probabilità che tale pezzo difettoso sia stato prodotto dalla macchina B.

SOLUZIONE:
Abbiamo $P(A) = \frac{7}{12}$, $P(B) = \frac{5}{12}$, $P(D|A) = P(D|B) = 0.12$.



a) $P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B)} = \frac{7}{12}$.
b) $P(B|D) = 1 - P(A|D) = \frac{5}{12}$.
Si osservi che poichè $P(D|A) = P(D|B) = 0.12$ si ha $P(A|D) = P(A)$ e $P(B|D) = P(B)$.

5. [punti 5] Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, stabilire se le seguenti funzioni nell'intervallo assegnato soddisfano le ipotesi del teorema ed in caso affermativo determinare il punto (o i punti) previsti nella tesi:

a) $f(x) = \ln(x-3)$ in $[0, 1]$;

b) $f(x) = x\sqrt{-x+2}$ in $[0, 2]$.

SOLUZIONE:
Teorema di Rolle:
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e se $f(a) = f(b)$, allora $\exists c \in (a, b) \colon f'(c) = 0$.

a) La funzione $f(x) = \ln(x-3)$ ha come $D_f =]3, +\infty[$, non è quindi definita in $[0, 1]$ e pertanto non soddisfa le ipotesi del teorema.
b) La funzione $f(x) = x\sqrt{-x+2}$ ha come $D_f =]-\infty, 2]$. Si ha inoltre $f(2) = f(0) = 0$ e

$$f' = \sqrt{-x+2} + x\frac{1}{2\sqrt{-x+2}}(-1) = \frac{-3x+4}{2\sqrt{-x+2}}$$

che ha come dominio $]-\infty, 2[$. Pertanto sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema e il punto c tale che $f'(c) = 0$ è $c = \frac{4}{3}$.