Matematica ed Informatica+Fisica
ESERCIZI Modulo di Matematica ed Informatica
Corso di Laurea in CTF - anno acc. 2013/2014
docente: Giulia Giantesio, gntgli@unife.it

Esercizi 8: Studio di funzioni

Studio di funzioni razionali fratte. Studiare le seguenti funzioni FINO alla derivata prima, tracciarne il grafico ed indicare gli eventuali punti di minimo e massimo (sono locali o assoluti?).

Esercizio 1. $f(x) = \dfrac{4 - 5x^2}{x^2 + x - 2}$

Esercizio 2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 5}$

Esercizio 3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{9 - x^2}$

Esercizio 4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

Esercizio 5. $f(x) = \dfrac{6 - x}{x^2 - 7x + 10}$

Esercizio 6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x + 2}$

Esercizio 7. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 3x}$

Esercizio 8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x}{x + 1}$

Studio di funzioni logaritmiche. Studiare le seguenti funzioni FINO alla derivata seconda, tracciarne il grafico ed indicare gli eventuali punti di minimo, massimo (sono locali o assoluti?) e punti di flesso.

Esercizio 9. $f(x) = x^3 \cdot (\ln x - 1)$

Esercizio 10. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Esercizio 11. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

Esercizio 12. $f(x) = x \cdot \ln^2 x$

Esercizio 13. $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x}$

Esercizio 14. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+5}{x-4}\right)$

Esercizio 15. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x-12}{x-6}\right)$

Esercizio 16. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-4}{2x+6}\right)$

Studio di funzioni irrazionali. Studiare le seguenti funzioni FINO alla derivata prima, tracciarne il grafico ed indicare gli eventuali punti di minimo, massimo (sono locali o assoluti?).

Esercizio 17. $f(x) = 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

Esercizio 18. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-6}{x+5}}$

Esercizio 19. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+8}{x+6}}$

Esercizio 20. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2x-8}}$

Studio di funzioni esponenziali. Studiare le seguenti funzioni FINO alla derivata prima, tracciarne il grafico ed indicare gli eventuali punti di minimo, massimo (sono locali o assoluti?).

Esercizio 21. $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

Esercizio 22. $f(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}}$

Esercizio 23. $f(x) = e^{\frac{x+1}{2x-2}}$

Esercizio 24. $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^3}$

Alcune soluzioni.

Soluzione. **Esercizio 1**

$$f(x) = \frac{4-5x^2}{x^2+x-2}$$

Classificazione. È una funzione razionale fratta, poiché la variabile indipendente x compare anche al denominatore della frazione.

Dominio. Poiché nella funzione compare una frazione, per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il denominatore sia diverso da zero, e pertanto si deve avere:

$$x^2+x-2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -2;\; x \neq 1.$$

Il dominio della funzione è $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; +\infty[$.

Intersezioni con gli assi. Con l'asse y abbiamo:

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= \dfrac{4-5x^2}{x^2+x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= -2 \end{cases}$$

Con l'asse x abbiamo:

$$\begin{cases} y &= 0 \\ y &= \dfrac{4-5x^2}{x^2+x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4-5x^2}{x^2+x-2} &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-5x^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 &= \dfrac{4}{5} \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \quad x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Pertanto la funzione interseca gli assi nei punti di coordinate $A(-\frac{2}{\sqrt{5}}; 0)$, $B(\frac{2}{\sqrt{5}}; 0)$, $C(0; -2)$.

Segno.

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{4-5x^2}{x^2+x-2} > 0$$

$$\text{Num.} > 0 \Rightarrow\; 4-5x^2 > 0 \Rightarrow\; -\frac{2}{\sqrt{5}} < x < \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow\; x^2+x-2 > 0 \Rightarrow\; x < -2;\; x > 1$$

$$\Rightarrow\ f(x)>0 \Rightarrow\ -2<x<-\frac{2}{\sqrt{5}};\quad \frac{2}{\sqrt{5}}<x<1;$$

ossia

$$f(x)>0 \text{ per } x\in]-2;-\tfrac{2}{\sqrt{5}}[\cup]\tfrac{2}{\sqrt{5}};1[.$$

Comportamento della funzione in punti particolari del dominio. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono -2, 1, $-\infty$, $+\infty$.
Abbiamo che:

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{4-5x^2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{4-5x^2}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{4-5\cdot(-2^+)^2}{(-2^++2)\cdot(-2^+-1)}=$$
$$=\frac{-16}{(0^+)\cdot(-3)}=\frac{-16}{0^-}=+\infty$$
$$\lim_{x\to -2^-}\frac{4-5x^2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{4-5x^2}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{4-5\cdot(-2^-)^2}{(-2^-+2)\cdot(-2^--1)}=$$
$$=\frac{-16}{(0^-)\cdot(-3)}=\frac{-16}{0^+}=-\infty$$

Avendo ottenuto due risultati infiniti per x tendente ad un valore finito (da destra e da sinistra), si può concludere che la retta di equazione $x=-2$ è un asintoto verticale per la funzione.

Abbiamo che:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{4-5x^2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{4-5x^2}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{4-5\cdot(1^+)^2}{(1^++2)\cdot(1^+-1)}=$$
$$=\frac{-1}{3\cdot(0^+)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{4-5x^2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{4-5x^2}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{4-5\cdot(1^-)^2}{(1^-+2)\cdot(1^--1)}=$$
$$=\frac{-1}{3\cdot(0^-)}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

Avendo ottenuto due risultati infiniti per x tendente ad un valore finito (da destra e da sinistra), si può concludere che la retta di equazione $x=1$ è un asintoto verticale per la funzione.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{4-5x^2}{x^2+x-2}=\frac{-\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata, che si risolve mettendo in evidenza

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4-5x^2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{4}{x^2}-5\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-5}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=-5$$

Similmente si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4-5x^2}{x^2+x-2}=-5.$$

Possiamo concludere che la funzione ammette come asintoto orizzontale la retta $y=-5$.

Studio della derivata prima. Abbiamo che:

$$f'(x)=\frac{(-10x)\cdot(x^2+x-2)-(4-5x^2)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{-5x^2+12x-4}{(x^2+x-2)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima: poniamo $f'(x)>0$, ossia

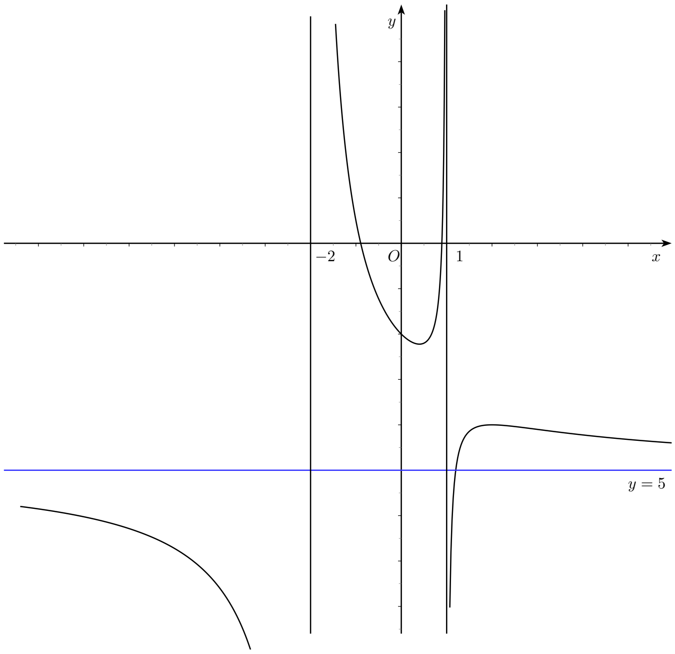
$$\frac{-5x^2+12x-4}{(x^2+x-2)^2}>0,$$

poiché $(x^2+x-2)^2>0$ per ogni x appartenente al dominio, è sufficiente porre

$$-5x^2+12x-4>0\ \Rightarrow\ \frac{2}{5}<x<2.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x\in]\frac{2}{5};2[\cap D_f=]\frac{2}{5};1[\cup]1;2[$, mentre f è strettamente decrescente per $x\in]-\infty;-2[\cup]-2;\frac{2}{5}[\cup]2;+\infty[$. Inoltre $x=\frac{2}{5}$ è un punto di minimo locale e $x=2$ è un punto di massimo locale. Il minimo locale della funzione vale $f(\frac{2}{5})=-\frac{20}{9}$, il massimo locale della funzione vale $f(2)=-4$.

Grafico.



Soluzione. **Esercizio 2**

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 5}$$

CLASSIFICAZIONE. È una funzione razionale fratta, poiché la variabile indipendente x compare anche al denominatore della frazione.

DOMINIO. Poiché nella funzione compare una frazione, per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il denominatore sia diverso da zero, e pertanto si deve avere:

$$x + 5 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -5.$$

Il dominio della funzione è $D_f =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI. Con l'asse y abbiamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x^2 - 16}{x + 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{16}{5} \end{cases}$$

Con l'asse x abbiamo:

$$\begin{cases} y &= 0 \\ y &= \dfrac{x^2-16}{x+5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x+5} &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-16 &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4; \quad x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

Pertanto la funzione interseca gli assi nei punti di coordinate $C(0;-\frac{16}{5})$, $A(-4;0)$, $B(4;0)$.

Segno.

$$f(x)>0 \Rightarrow \frac{x^2-16}{x+5}>0$$

$$\text{Num.} > 0 \Rightarrow x^2-16>0 \Rightarrow x<-4; x>4$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow x+5>0 \Rightarrow x>-5$$

$$\Rightarrow f(x)>0 \Rightarrow -5<x<-4;\ x>4;$$

ossia

$$f(x)>0 \text{ per } x \in]-5;-4[\cup]4;+\infty[.$$

Comportamento della funzione in punti particolari del dominio. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono -5, $-\infty$, $+\infty$.
Abbiamo che:

$$\lim_{x\to -5^+} \frac{x^2-16}{x+5} = \frac{(-5^+)^2-16}{-5^+ +5} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -5^-} \frac{x^2-16}{x+5} = \frac{(-5^-)^2-16}{-5^- +5} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

Avendo ottenuto due risultati infiniti per x tendente ad un valore finito (da destra e da sinistra), si può concludere che la retta di equazione $x=-5$ è un asintoto verticale per la funzione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-16}{x+5} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata, che si risolve mettendo in evidenza

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-16}{x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\dfrac{16}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{16}{x^2}\right)}{1+\dfrac{5}{x}} = +\infty$$

Similmente si ha:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-16}{x+5}=-\infty.$$
Calcolando i limiti per x tendente all'infinito si sono ottenuti valori infiniti: di conseguenza si può affermare che la funzione non ammette asintoto orizzontale, allora vediamo se esiste l'asintoto obliquo. La funzione ammette come asintoto obliquo la retta $y=mx+q$ se esistono finiti i seguenti limiti:
$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad \text{e}\qquad q=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx).$$
Abbiamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-16}{x^2+5x}=\frac{+\infty}{+\infty}$$
forma indeterminata, che si risolve mettendo in evidenza
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-16}{x^2+5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{16}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{16}{x^2}}{1+\frac{5}{x}}=1$$
Similmente si ha:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-16}{x^2+5x}=1.$$
Dunque $m=1$.

Infine, abbiamo che
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-16}{x+5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x-16}{x+5}=\frac{-\infty}{+\infty}$$
forma indeterminata, che si risolve mettendo in evidenza
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x-16}{x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5-\frac{16}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5-\frac{16}{x}}{1+\frac{5}{x}}=-5.$$
Similmente si ha:
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-16}{x+5}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x-16}{x+5}=-5$$
Dunque $q=-5$. Possiamo concludere che la funzione ammette come asintoto obliquo la retta $y=x-5$.

Studio della derivata prima. Abbiamo che:
$$f'(x)=\frac{(2x)\cdot(x+5)-(x^2-16)\cdot(1)}{(x+5)^2}=\frac{x^2+10x+16}{(x+5)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima: poniamo $f'(x) > 0$, ossia

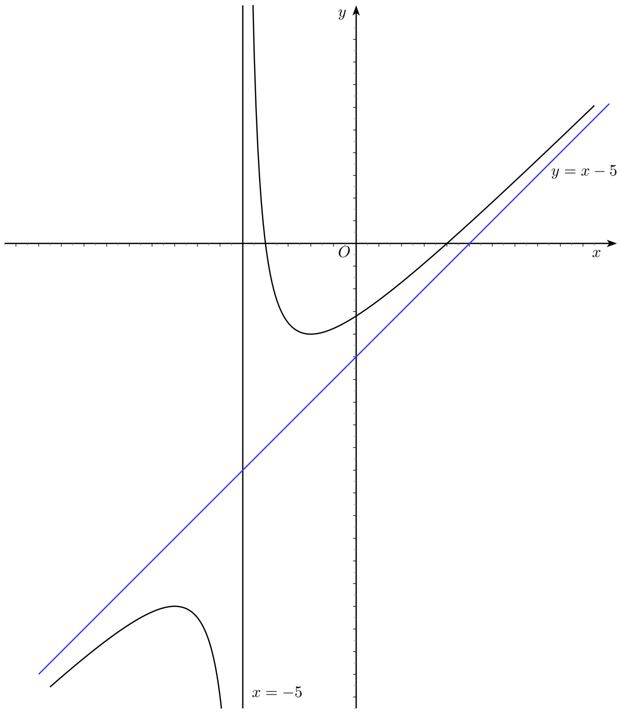
$$\frac{x^2 + 10x + 16}{(x+5)^2} > 0,$$

poiché $(x+5)^2 > 0$ per ogni x appartenente al dominio, è sufficiente porre

$$x^2 + 10x + 16 > 0 \;\Rightarrow\; x < -8; \; x > -2.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]-\infty; -8[\cup]-2; +\infty[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]-8; -2[$. Inoltre $x = -2$ è un punto di minimo locale e $x = -8$ è un punto di massimo locale. Il minimo locale della funzione vale $f(-2) = -4$, il massimo locale della funzione vale $f(-8) = -16$.

Grafico probabile.



Soluzione. **Esercizio 9**

$$f(x) = x^3 \cdot (\ln x - 1)$$

Classificazione. È una funzione mista logaritmica intera.

Dominio. Per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero, e pertanto: $D_f =]0; +\infty[$.

Segno e Intersezioni con gli assi.

$$f(x) > 0 \;\Rightarrow\; x^3 \cdot (\ln x - 1) > 0.$$

Abbiamo che:

$$\begin{gathered} x^3 > 0 \;\Rightarrow\; x > 0; \\ \ln x - 1 > 0 \;\Rightarrow\; x > e; \\ \Rightarrow x < 0 \text{ o } x > e. \end{gathered}$$

Poiché il dominio è $]0; +\infty[$, si ha che $f(x) > 0$ per $x > e$. La funzione non interseca l'asse y perché $x = 0 \notin D_f$, mentre interseca l'asse x nel punto di coordinate $(e; 0)$.

Comportamento della funzione in punti particolari del dominio. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono 0, $+\infty$.

Abbiamo che:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \cdot (\ln x - 1) = 0 \cdot (-\infty),$$

forma indeterminata. Possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \cdot (\ln x - 1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{\dfrac{1}{x^3}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata che possiamo risolvere con la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{3}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0.$$

Dunque la funzione non ammette asintoti verticali.

Abbiamo che:

$$\lim_{x\to +\infty} x^3 \cdot (\ln x - 1) = +\infty,$$

la funzione non ammette asintoto orizzontale, allora vediamo se esiste l'asintoto obliquo $y = mx + q$. Abbiamo che:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} x^2 \cdot (\ln x - 1) = +\infty,$$

quindi possiamo concludere che non esiste neanche l'asintoto obliquo.

Studio della derivata prima. Abbiamo che:

$$f'(x) = x^2 \cdot (3\ \ln x - 2).$$

Studiamo il segno della derivata prima: ponendo $f'(x) > 0$, otteniamo che

$$x^2 \cdot (3\ \ln x - 2) > 0\ \Rightarrow\ 3\ \ln x - 2 > 0 \Rightarrow\ \ln x > \frac{2}{3} \Rightarrow\ x > \sqrt[3]{e^2}.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]\sqrt[3]{e^2}; +\infty[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]0; \sqrt[3]{e^2}[$.

Inoltre $x = \sqrt[3]{e^2}$ è un punto di minimo locale. Il minimo della funzione vale $f(\sqrt[3]{e^2}) = -\frac{1}{3}\, e^2$.

Studio della derivata seconda. Abbiamo che:

$$f''(x) = x \cdot (6\ \ln x - 1).$$

Studiamo il segno della derivata seconda: ponendo $f''(x) > 0$, otteniamo che

$$x \cdot (6\ \ln x - 1) > 0.$$

Abbiamo che:

$$x > 0$$

e

$$6\ \ln x - 1 > 0\ \Rightarrow\ \ln x > \frac{1}{6}\ \Rightarrow\ x > \sqrt[6]{e}.$$

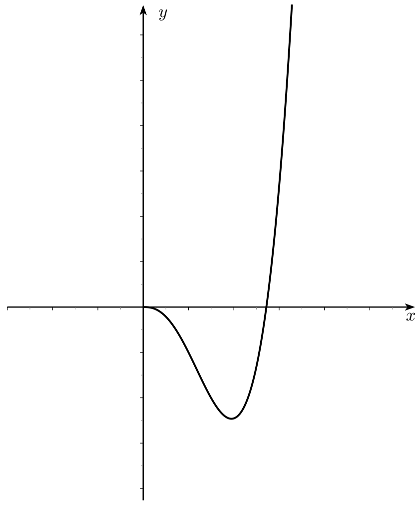
Quindi, tenendo presente che $D_f =]0; +\infty[$

$$f''(x) > 0\ \Rightarrow\ x > \sqrt[6]{e}.$$

Possiamo concludere che la funzione f è convessa per $x \in]\sqrt[6]{e}; +\infty[$, mentre f è concava per $x \in]0; \sqrt[6]{e}[$.

Poiché $f(\sqrt[6]{e}) = -\frac{5}{6}\sqrt{e}$, abbiamo che $F = \left(\sqrt[6]{e}; -\frac{5}{6}\sqrt{e}\right)$ è un punto di flesso.

Grafico:



Soluzione. **Esercizio 10**

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Classificazione. È una funzione logaritmica intera.

Dominio. Per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero, e pertanto si deve avere:

$$x^2 + 1 > 0 \ \Rightarrow \ \text{per ogni} \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Il dominio della funzione è $D_f = \mathbb{R}$.

Segno e Intersezioni con gli assi.

$$f(x) > 0 \ \Rightarrow \ \ln(x^2 + 1) > 0 \ \Rightarrow \ x^2 + 1 > 1 \ \Rightarrow \ x^2 > 0 \ \Rightarrow \ x \neq 0.$$

Dunque $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e si annulla per $x = 0$.

La funzione interseca gli assi solo nell'origine $O(0; 0)$.

Comportamento della funzione in punti particolari del dominio. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono $-\infty$, $+\infty$. In particolare, poiché il dominio è $\mathbb{R}$ non esistono asintoti verticali.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$$

Calcolando i limiti per x tendente all'infinito si sono ottenuti valori infiniti: di conseguenza si può affermare che la funzione non ammette asintoto orizzontale, allora vediamo se esiste l'asintoto obliquo. La funzione ammette come asintoto obliquo la retta $y = mx + q$ se esistono finiti i seguenti limiti:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (\neq 0) \qquad \text{e} \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx).$$

Abbiamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{+\infty}{\pm\infty}$$

forma indeterminata che si risolve con la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0.$$

Possiamo concludere che non esiste neanche l'asintoto obliquo.

Studio della derivata prima. Abbiamo che:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Studiamo il segno della derivata prima: ponendo $f'(x) > 0$, otteniamo che

$$\frac{2x}{x^2+1} > 0 \;\Rightarrow\; x > 0.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]-\infty; 0[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]0; +\infty[$.

Inoltre $x = 0$ è un punto di minimo assoluto. Il minimo della funzione vale $f(0) = 0$.

Studio della derivata seconda. Abbiamo che:

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}.$$

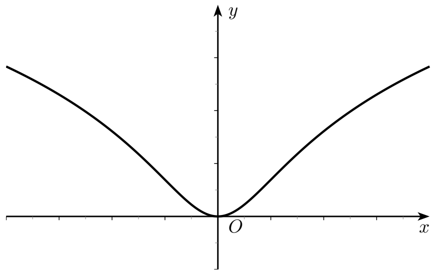
Studiamo il segno della derivata seconda: ponendo $f''(x) > 0$, otteniamo che

$$\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} > 0 \;\Rightarrow\; -1 < x < 1.$$

Possiamo concludere che la funzione f è convessa per $x \in]-1; 1[$, mentre f è concava per $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Poiché $f(-1) = f(1) = \ln 2$, abbiamo che $F_1(-1; \ln 2)$ e $F_2(1; \ln 2)$ sono punti di flesso.

Grafico:



Osserviamo che il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y, quindi la funzione è pari. Infatti:

$$f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = f(x).$$

Soluzione. **Esercizio 17**

$$f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Classificazione. È una funzione irrazionale fratta.

Dominio. Data la natura della funzione (radice con indice pari), per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il radicando sia maggiore o uguale a zero, quindi:

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$\text{Num.} \geq 0 \Rightarrow \; x \geq 0.$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow \; x + 1 > 0 \Rightarrow \; x > -1$$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \; x < -1; \; x \geq 0.$$

Il dominio della funzione è $D_f =]-\infty; -1[\cup [0; +\infty[$.

Intersezioni con gli assi. Con l'asse y abbiamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \sqrt{\dfrac{0}{0+1}} = 1 \end{cases}$$

Con l'asse x abbiamo:

$$\begin{cases} y & = & 0 \\ y & = & 1-\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & x+1 \\ y & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases} \text{impossibile}$$

Pertanto la funzione interseca solo l'asse y nel punto di coordinate $(0,1)$. L'equazione irrazionale del secondo sistema è stata risolta senza porre la condizione di esistenza della radice, poiché essa era stata già considerata al momento della determinazione del dominio della funzione.

Segno.

$$f(x)>0 \Rightarrow\ 1-\sqrt{\frac{x}{x+1}}>0\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{x}{x+1}}<1\ \Rightarrow\ \frac{x}{x+1}<1$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{x+1}-1<0\ \Rightarrow\ \frac{x-x-1}{x+1}<0\ \Rightarrow\ \frac{-1}{x+1}<0\ \Rightarrow\ \frac{1}{x+1}>0$$

$$\text{Num.}>0 \Rightarrow\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

$$\text{Den.}>0 \Rightarrow\ x+1>0 \Rightarrow\ x>-1$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{x+1}>0 \Rightarrow\ x>-1.$$

Ripetendo per la disequazione irrazionale le stesse considerazioni fatte per l'equazione, bisogna rettificare parzialmente il risultato (tenendo presente il dominio della funzione), per cui $f(x)>0$ solo se $x>0$, ossia

$$f(x)>0 \text{ per } x\in]0;+\infty[.$$

Comportamento della funzione in punti particolari del dominio. I punti importanti, per i quali utile stabilire il comportamento della funzione, sono -1, $-\infty$, $+\infty$. Per $x=0$ è già stato determinato l'andamento, infatti la funzione è definita per $x=0$ e si ha $f(0)=1$.
Abbiamo che:

$$\lim_{x\to-1^-} 1-\sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1-\sqrt{\frac{-1}{-1^-+1}} = 1-\sqrt{\frac{-1}{0^-}} = 1-\sqrt{+\infty} = -\infty$$

Pertanto la retta di equazione $x=-1$ è asintoto verticale sinistro per la funzione.

Inoltre, abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} 1-\sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1-\sqrt{\frac{+\infty}{+\infty}}$$

forma indeterminata che si risolve mettendo in evidenza

$$\lim_{x\to+\infty} 1-\sqrt{\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} 1-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 1-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}}} = 1-1=0$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} 1-\sqrt{\frac{x}{x+1}} = 0.$$

Dunque la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

Studio della derivata prima. Abbiamo che:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima: ponendo $f'(x)>0$, otteniamo che

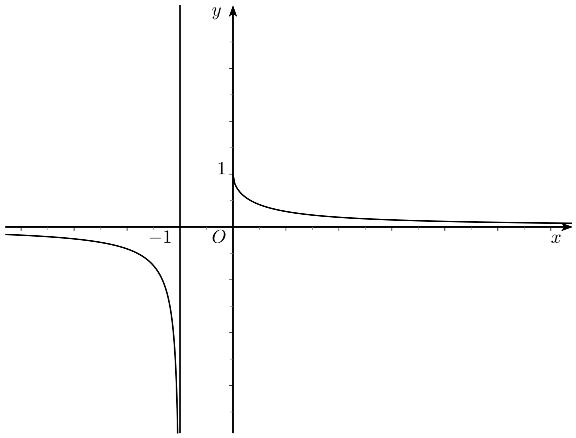
$$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}>0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{(x+1)^2}<0 \text{ per nessun } x\in D_f.$$

Possiamo concludere che $f'(x)<0$ per ogni $x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, quindi che la funzione f è strettamente decrescente nel suo dominio. Inoltre, osserviamo che la derivata prima non è definita in $x=0$ e, poichè

$$\lim_{x\to0^+} -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$$

abbiamo che $x=0$ è un punto a tangente verticale per f.

Grafico.



Soluzione. **Esercizio 21**

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Classificazione. È una funzione mista esponenziale fratta.

Dominio. L'unica condizione da discutere riguarda il denominatore dell'esponenziale, ossia $x \neq 0$, quindi $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Intersezioni con gli assi. Non vi sono intersezioni con l'asse x, né, tantomeno, con l'asse y, visto che $0 \notin D_f$.

Segno. Siccome la funzione è un prodotto di due termini, ossia l'esponenziale e il quadrato, sempre strettamente positivi sul dominio fissato, si ha che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D_f$.

Comportamento della funzione in punti particolari del dominio. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono $-\infty$, 0, $+\infty$.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0 \cdot (+\infty),$$

forma indeterminata. Poniamo $y = \dfrac{1}{x}$ ed otteniamo:

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{y^2} \cdot e^{-y} = \lim_{y \to -\infty} \frac{e^{-y}}{y^2} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

forma indeterminata che si può risolvere applicando due volte la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{e^{-y}}{y^2}=\lim_{y\to-\infty}\frac{-e^{-y}}{2y}=\lim_{y\to-\infty}\frac{e^{-y}}{2}=+\infty.$$

Inoltre:

$$\lim_{x\to0^+}x\cdot e^{-\frac{1}{x}}=0.$$

Poiché solo limite per $x\to0^-$ risulta $+\infty$, possiamo concludere che la retta $x=0$ è asintoto verticale sinistro.

Abbiamo che:

$$\lim_{x\to-\infty}x^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$$

quindi la funzione non ammette asintoto orizzontale, allora vediamo se esiste l'asintoto obliquo $y=mx+q$. Abbiamo che:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\pm\infty,$$

dunque non esiste nemmeno l'asintoto obliquo.

Studio della derivata prima. La derivata é

$$f'(x)=2x\cdot e^{-\frac{1}{x}}+x^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=2x\cdot e^{-\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}$$

che, raccogliendo a fattor comune il termine $e^{-\frac{1}{x}}$, risulta

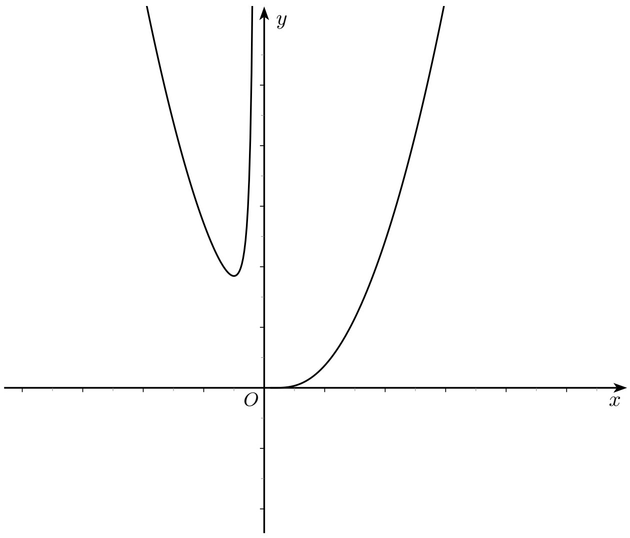
$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot(2x+1). \tag{1}$$

Analizziamo la monotonia della funzione attraverso la disequazione $f'(x)>0$, che, per la (1) , equivale a

$$2x+1>0\Rightarrow x>-\frac{1}{2}.$$

Pertanto, la funzione è decrescente su $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$, mentre è crescente sul resto del dominio e quindi il punto $x_0=-\dfrac{1}{2}$ è di minimo locale (locale, perché $f(x_0)=0.25\cdot e^2\simeq1.84$, mentre $f(x)\to0$ per $x\to0^+$, come visto in precedenza).

Grafico probabile.



Soluzione. **Esercizio 22**

$$f(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}}$$

Classificazione. È una funzione esponenziale fratta.

Dominio. Per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il denominatore dell'esponente sia diverso da zero, e pertanto si deve avere:

$$x^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 0.$$

Il dominio della funzione è $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Segno e Intersezioni con gli assi.

$$f(x) > 0 \;\Rightarrow\; e^{\frac{1-x}{x^2}} > 0 \;\Rightarrow\; \text{per ogni } x \in D_f.$$

Dunque $f(x) > 0$ per ogni x appartenente al dominio, inoltre la funzione non è mai nulla, quindi non interseca l'asse x. Infine la funzione non interseca nemmeno l'asse y perché $0 \notin D_f$.

Comportamento della funzione in punti particolari del dominio. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono 0, $-\infty$, $+\infty$.

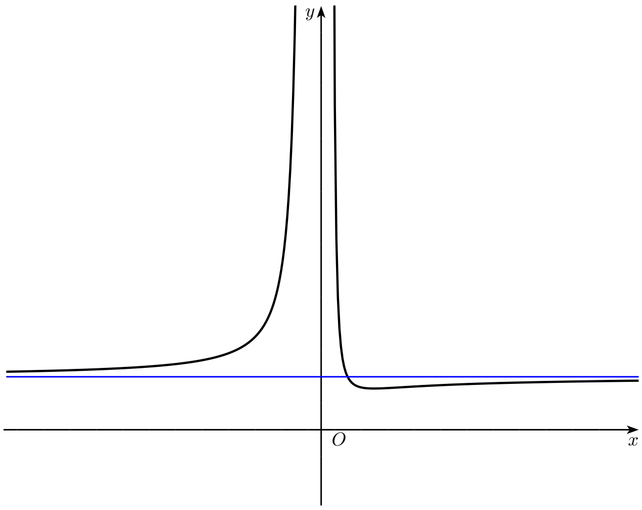
Abbiamo che:
$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1-x}{x^2}} = e^{\frac{1}{(0^-)^2}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$
e
$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1-x}{x^2}} = e^{\frac{1}{(0^+)^2}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty;$$
quindi possiamo concludere che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale.

Inoltre, abbiamo che:
$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1-x}{x^2}} = e^{\frac{-\infty}{+\infty}},$$
forma indeterminata che si risolve mettendo in evidenza:
$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1-x}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\frac{1}{x}-1}{x}} = e^{\frac{-1}{+\infty}} = e^0 = 1.$$
In modo analogo si ha:
$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1-x}{x^2}} = e^0 = 1.$$
dunque possiamo concludere che la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale.

Studio della derivata prima. Abbiamo che:
$$f'(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}} \cdot \frac{x-2}{x^3}.$$
Studiamo il segno della derivata prima: poniamo $f'(x) > 0$, ossia
$$e^{\frac{1-x}{x^2}} \cdot \frac{x-2}{x^3} > 0,$$
poiché $e^{\frac{1-x}{x^2}} > 0$ per ogni x appartenente al dominio, è sufficiente porre
$$\frac{x-2}{x^3} > 0$$
da cui otteniamo
$$f'(x) > 0 \ \Rightarrow \ x < 0; \ x > 2.$$
Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]0; 2[$.

Inoltre $x = 2$ è un punto di minimo assoluto. Il minimo della funzione vale $f(2) = e^{-\frac{1}{4}}$.

Grafico:



y
O
x