

Matematica ed Informatica+Fisica
ESERCIZI Modulo di Matematica ed Informatica
Corso di Laurea in CTF - anno acc. 2013/2014
docente: Giulia Giantesio, gntgli@unife.it

Esercizi 7: Derivata di una funzione e sue applicazioni

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni.

Esercizio 1. $f(x) = 3x + 4 \ln x - 2e^x + 3 \cos x$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot D(x) + 4 \cdot D(\ln x) - 2 \cdot D(e^x) + 3 \cdot D(\cos x) = \\ &= 3 + 4 \cdot \frac{1}{x} - 2e^x + 3 \cdot (-\sin x) = \\ &= 3 + \frac{4}{x} - 2e^x - 3 \sin x \end{aligned}$$

Esercizio 2. $f(x) = 4x + 2 \ln x - 3e^x - 5 \sin x$

Esercizio 3. $f(x) = x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 3x - 1$

Esercizio 4. $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - e^{2x} + \ln x$

Esercizio 5. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 4$

Esercizio 6. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 - 3x + 1$

Esercizio 7. $f(x) = x^4 + \sqrt[3]{x} - \ln x + e^x - \operatorname{arctg} x$

Esercizio 8. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

Esercizio 9. $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}$

Esercizio 10. $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Soluzione. $f'(x) = \frac{3}{5 \sqrt[5]{x^2}} + \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}} + \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^6}}$

Esercizio 11. $f(x) = \sqrt[5]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Esercizio 12. $f(x) = (x^3 + 2x^2 + x) \cdot \ln x$

Soluzione. Per la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(D(x^3 + 2x^2 + x) \right) \cdot \ln x + (x^3 + 2x^2 + x) \cdot D(\ln x) = \\ &= (3x^2 + 4x + 1) \cdot \ln x + (x^3 + 2x^2 + x) \cdot \frac{1}{x} = \\ &= (3x^2 + 4x + 1) \cdot \ln x + x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Esercizio 13. $f(x) = (x^3 - x^2 + 2x) \cdot \sin x$

Esercizio 14. $f(x) = (3x - 2) \cdot (x^2 + 4x - 3)$

Esercizio 15. $f(x) = (2x + 3) \cdot (x^2 + 3x - 1)$

Esercizio 16. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$

Soluzione. Per la regola di derivazione del rapporto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(D(x^2 - 3x + 5) \right) \cdot (x^2 - 1) - (x^2 - 3x + 5) \cdot D(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{(2x - 3) \cdot (x^2 - 1) - (x^2 - 3x + 5) \cdot (2x)}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 - 2x - 3x^2 + 3 - 2x^3 + 6x^2 - 10x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^2 - 12x + 3}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Esercizio 17. $f(x) = \frac{x^3 - 2 \ln x}{x}$

Esercizio 18. $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2}$

Soluzione. $f'(x) = \frac{2(x^2 - 7x + 2)}{(x^2 - 2)^2}$

Esercizio 19. $f(x) = \frac{x^2 - 3 \cos x}{x}$

Esercizio 20. $f(x) = (x^2 - 3x - 5) \cdot (3x^2 - 2x + 1) + \frac{x^2 + 1}{3(x^2 - 1)}$

Soluzione. $f'(x) = 12x^3 - 33x^2 - 16x + 7 - \frac{4x}{3(x^2 - 1)^2}$

Esercizio 21. $f(x) = \frac{(2x^2 - x) \cdot \ln x}{x^2 - x - 2}$

Esercizio 22. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4}$

Soluzione. $f'(x) = -\frac{1}{x^2 + 4x + 4} = -\frac{1}{(x + 2)^2}$

Esercizio 23. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 6x + 9}$

Soluzione. $f'(x) = \frac{x + 7}{(x + 3)^3}$

Esercizio 24. $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^5$

Soluzione. Dobbiamo applicare la regola di derivazione della funzione composta:

$$D[f(x)^n] = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x);$$

dunque

$$f'(x) = 5 (3x^2 - 2x + 1)^4 \cdot [D(3x^2 - 2x + 1)] = 5 (3x^2 - 2x + 1)^4 \cdot (6x - 2).$$

Esercizio 25. $f(x) = (7x^3 - 2x^2 + 3x)^4$

Esercizio 26. $f(x) = \cos^5 x$

Esercizio 27. $f(x) = \ln^3 x$

Esercizio 28. $f(x) = (x^2 - 5x + 6)^7$

Esercizio 29. $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$

Soluzione. $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Esercizio 30. $f(x) = \sqrt{3x - x^2} - 4x$

Soluzione. $f'(x) = \frac{3 - 2x}{2\sqrt{3x - x^2}} - 4$

Esercizio 31. $f(x) = x - \sqrt[3]{4 - x^2}$

Esercizio 32. $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{3x - 1}}$

Esercizio 33. $f(x) = \sqrt{\frac{3x + 7}{8 - x}}$

Soluzione. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3x + 7}{8 - x}}} \cdot \frac{31}{(8 - x)^2}$

Esercizio 34. $f(x) = \sqrt{\frac{2x-9}{1-x}}$

Soluzione. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-9}{1-x}}} \cdot \frac{-7}{(1-x)^2}$

Esercizio 35. $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3-9x}}$

Soluzione. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+4}{3-9x}}} \cdot \frac{39}{(3-9x)^2}$

Esercizio 36. $f(x) = e^{3+4x-x^2}$

Esercizio 37. $f(x) = e^{\frac{4x+1}{x^2-2}}$

Esercizio 38. $f(x) = e^{\frac{x^2+5}{x+1}}$

Soluzione. $f'(x) = e^{\frac{x^2+5}{x+1}} \cdot \frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$

Esercizio 39. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

Soluzione. $f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}$

Esercizio 40. $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^3}$

Soluzione. $f'(x) = e^{-x^3} \cdot (3x^2 - 3x^5)$

Esercizio 41. $f(x) = \ln(2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1)$

Esercizio 42. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Soluzione. $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Esercizio 43. $f(x) = \ln\left(\frac{5x+4}{x-3}\right)$

Soluzione.

$$f'(x) = \frac{-19}{(5x+4) \cdot (x-3)}$$

Esercizio 44. $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{2x-10}\right)$

Soluzione. $f'(x) = \frac{2}{(3-x) \cdot (x-5)}$

Esercizio 45. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-9}{1-4x}\right)$

Soluzione. $f'(x) = \frac{-4x^2 + 2x - 36}{(x^2-9) \cdot (1-4x)}$

Esercizio 46. $f(x) = \ln\left(\frac{4-x^2}{3x+1}\right)$

Soluzione. $f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x - 12}{(4-x^2) \cdot (3x+1)}$

Esercizio 47. $f(x) = (\sin x^4) \cdot (\cos \sqrt{x})$

Esercizio 48. $f(x) = \sin \sqrt[3]{x} + \cos 2x$

Soluzione.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \cos \sqrt[3]{x} - 2 \sin 2x.$$

Esercizio 49. $f(x) = \sin\left(\frac{3x-2}{2x+7}\right)$

Soluzione. $f'(x) = \cos\left(\frac{3x-2}{2x+7}\right) \cdot \frac{25}{(2x+7)^2}$

Esercizio 50. $f(x) = \cos\left(\frac{x-2}{5x+9}\right)$

Soluzione. $f'(x) = -\sin\left(\frac{x-2}{5x+9}\right) \cdot \frac{19}{(5x+9)^2}$

Esercizio 51. $f(x) = \ln(\ln x)$

Soluzione. Abbiamo:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot [D(\ln x)] = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}.$$

Esercizio 52. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+3x+1}}$

Esercizio 53. $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+4)}$

Esercizio 54. $f(x) = \ln(\sqrt{\cos x})$

Soluzione. $f'(x) = -\frac{\operatorname{tg} x}{2}$

Massimi, minimi di una funzione

Dopo aver determinato il dominio, studiare il segno della derivata prima delle seguenti funzioni, scrivere gli intervalli in cui esse sono strettamente crescenti o decrescenti e determinare eventuali punti di massimo x_M o minimo x_m relativi.

Esercizio 1. $f(x) = x^3 - 3x + 7$

Soluzione. $x_m = 1$; $x_M = -1$

Esercizio 2. $f(x) = 3x^3 - 27x^2 + 1$

Soluzione. $x_m = 6$; $x_M = 0$

Esercizio 3. $f(x) = x \cdot (2 - 3x)^3$

Soluzione. Il dominio della funzione è \mathbb{R} . Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (Dx) \cdot (2 - 3x)^3 + x \cdot [D(2 - 3x)^3] = \\ &= (2 - 3x)^3 + x \cdot [3(2 - 3x)^2 \cdot D(2 - 3x)] = \\ &= (2 - 3x)^3 + x \cdot [3(2 - 3x)^2 \cdot (-3)] = \\ &= (2 - 3x)^3 - 9x \cdot (2 - 3x)^2 = (2 - 3x)^2 \cdot (2 - 12x). \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$(2 - 3x)^2 \cdot (2 - 12x) > 0.$$

Abbiamo che

$$(2 - 3x)^2 > 0 \text{ per ogni } x \neq \frac{2}{3};$$

$$2 - 12x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{6};$$

quindi $(2 - 3x)^2 \cdot (2 - 12x) > 0$ per $x < \frac{1}{6}$.

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]-\infty; \frac{1}{6}[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]\frac{1}{6}; \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[$.

Inoltre $x = \frac{1}{6}$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = \frac{2}{3}$ è un punto stazionario che non è né punto di massimo né punto di minimo relativo (in $x = \frac{2}{3}$ la derivata prima si annulla, ma negli intervalli $] \frac{1}{6}; \frac{2}{3}[$ e $] \frac{2}{3}; +\infty[$ non cambia segno).

Esercizio 4. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 5}$

Soluzione. $x_m = 5 + 2\sqrt{7}$; $x_M = 5 - 2\sqrt{7}$

Esercizio 5. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

Soluzione. $x_m = 1$; $x_M = -1$

Esercizio 6. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3x - 3}$

Soluzione. $x_m = 2$; $x_M = 0$

Esercizio 7. $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$

Soluzione. Il dominio della funzione è \mathbb{R} . Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante la regola di derivazione del rapporto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x + 3) \cdot (x^2 + x + 1) - (2x^2 + 3x + 2) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \\ &= \frac{4x^3 + 7x^2 + 7x + 3 - (4x^3 + 8x^2 + 7x + 2)}{(x^2 + x + 1)^2} = \\ &= \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} > 0.$$

Abbiamo che

$$\text{Num.} > 0 \Rightarrow -x^2 + 1 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1;$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow (x^2 + x + 1)^2 > 0 \Rightarrow \text{per ogni } x \in \mathbb{R};$$

quindi $\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} > 0$ per $-1 < x < 1$.

Possiamo concludere che f è strettamente crescente per $x \in]-1; 1[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Inoltre $x = -1$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = 1$ è un punto di massimo relativo (f' non solo si annulla in questi due punti, ma cambia anche segno).

Esercizio 8. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

Soluzione. Il dominio della funzione è $] -\infty; 2[\cup] 2; +\infty[$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante le regole di derivazione del prodotto e della composizione:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{\frac{1}{x-2}} + x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \cdot D\left(\frac{1}{x-2}\right) = e^{\frac{1}{x-2}} + x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{-1}{(x-2)^2} = \\ &= e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} > 0.$$

Poiché $e^{\frac{1}{x-2}} > 0$ per ogni x appartenente al dominio, basta porre

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} > 0.$$

Abbiamo che

$$\text{Num.} > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow x < 1 \vee x > 4;$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow (x-2)^2 > 0 \Rightarrow \text{per ogni } x \neq 2;$$

quindi $\frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} > 0$ per $x < 1 \vee x > 4$.

Possiamo concludere che f è strettamente crescente per $x \in] -\infty; 1[\cup] 4; +\infty[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in] 1; 2[\cup] 2; 4[$.

Inoltre $x = 1$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 4$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 9. $f(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}}$

Soluzione. $x_m = 2$

Esercizio 10. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Soluzione. Il dominio della funzione è $] 0; +\infty[$. Calcoliamo la derivata prima della funzione mediante la regola di derivazione del rapporto:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x) - (\ln x) \cdot (1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima, ponendo $f'(x) > 0$, ossia

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} > 0.$$

Abbiamo che

$$\text{Num.} > 0 \Rightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow x < e;$$

$$\text{Den.} > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow \text{per ogni } x \neq 0;$$

poiché il dominio è $]0; +\infty[$, otteniamo che $\frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ per $0 < x < e$.

Possiamo concludere che f è strettamente crescente per $x \in]0; e[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]e; +\infty[$.

Inoltre $x = e$ è un punto di massimo relativo.

Massimi, minimi e flessi di una funzione

Determinare i punti di massimo x_M e di minimo x_m e gli eventuali punti di flesso x_F delle seguenti funzioni.

Esercizio 1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

Soluzione. $x_M = -1; x_m = 2; x_F = \frac{1}{2}$

Esercizio 2. $f(x) = -x^3 + 18x^2 + 1$

Soluzione. $x_M = 12; x_m = 0; x_F = 6$

Esercizio 3. $f(x) = x^2 - x^3$

Soluzione. $x_M = \frac{2}{3}; x_m = 0; x_F = \frac{1}{3}$

Esercizio 4. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$

Soluzione. $x_M = 0; x_m = -2; x_m = +2; x_F = -\frac{2}{\sqrt{3}}; x_F = +\frac{2}{\sqrt{3}}$

Esercizio 5. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Soluzione. $x_m = 0; x_F = -1; x_F = 1$

Esercizio 6. $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Soluzione. $x_M = 1; x_F = 2$