

Matematica ed Informatica+Fisica
ESERCIZI Modulo di Matematica ed Informatica
Corso di Laurea in CTF - anno acc. 2013/2014
docente: Giulia Giantesio, gntgli@unife.it

ESERCIZI 6: LIMITI DI FUNZIONI E APPLICAZIONI

Calcolare i seguenti limiti.

Esercizio 1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3 - 2x}{2 - x}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 2. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-x + 2}{x + 3}$

Soluzione. $-\infty$

Esercizio 3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 1}{x - 2}$

Soluzione. $-\infty$

Esercizio 4. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3x}{x - 2}}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 5. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{1 - x}{x + 4}\right)$

Soluzione. $-\infty$

Esercizio 6. $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x+2}{x-1}}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 7. $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x+2}{x-1}}$

Soluzione. 0

Esercizio 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{2x - 7}$

Soluzione. $\frac{1}{2}$

Esercizio 9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

Soluzione. -1

Esercizio 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2x+5}{x+1} \right)$

Soluzione. $\ln 2$

Esercizio 11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x^2-5x}{1-x} \right)$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x^3 - 4x^2 + 2)$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

Soluzione. 0

Esercizio 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^3+2}{x^2-1}}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 15. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x^2-8x+15}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 16. $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x-1}{x^2+3x-10}$

Soluzione. $-\infty$

Esercizio 17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3-6x^2+7x-1}{8x^3+x-3}$

Soluzione. $\frac{5}{8}$

Esercizio 18. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$

Soluzione. $-\infty$

Esercizio 19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3-x^2+7}{8x^3-2x^2+x-1}$

Soluzione. $\frac{3}{4}$

Esercizio 20. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$

Soluzione. $-\infty$

Esercizio 21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 - x^2 + 7}{8x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 1}$

Soluzione. 0

Esercizio 22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 - 2}{5x^3 - 2x^2 - 7x - 1}$

Soluzione. $\frac{3}{5}$

Esercizio 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + x}{x^2 - 4x}$

Soluzione. $-\frac{1}{4}$

Esercizio 24. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + x - 20}$

Soluzione. $\frac{1}{9}$

Esercizio 25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + x - 8}{9x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 2}$

Soluzione. 0

Esercizio 26. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 6x^2 + 3}{10x^3 - 4x^2 - 9x - 5}$

Soluzione. $-\frac{2}{5}$

Esercizio 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2 - 5x}{3x^2 - 4x}$

Soluzione. $\frac{5}{4}$

Esercizio 28. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 30}{x^2 - 13x + 40}$

Soluzione. $-\frac{11}{3}$

Esercizio 29. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - x^2 + 2x + 2}{7x^2 + 3x - 1}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 30. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{1 - x}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 31. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x)$

Soluzione. 2

Esercizio 32. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 - 3})$

Soluzione. -3

Esercizio 33. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - x)$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 34. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3 - x} - \sqrt{1 - x})$

Soluzione. 0

Esercizio 35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

Soluzione. 1

Esercizio 36. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^3}{x^4}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 37. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{3\sqrt{x}}$

Soluzione. $\frac{1}{3}$

Esercizio 38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

Soluzione. 0

Esercizio 39. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^4}$

Soluzione. $-\infty$

Esercizio 40. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x}{3x} - x^2 \right)$

Soluzione. 2

Esercizio 41. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 5 \sin x}{4x + 7 \sin x}$

Soluzione. $\frac{8}{11}$

Esercizio 42. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{6x}$

Soluzione. e^{-6}

Esercizio 43. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+2} \right)^x$ porre $t = x + 2$

Soluzione. e

Esercizio 44. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x+3} \right)^{x+2}$

Soluzione. e^{-4}

Esercizio 45. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-5} \right)^{3x}$

Soluzione. e^3

Esercizio 46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{x}$

Soluzione. -7

Esercizio 47. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x+1)}{\sqrt{x+2}}$

Soluzione. 0

Esercizio 48. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x^4+3}}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 49. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+1}{e^x}$

Soluzione. 1

Esercizio 50. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2-x}}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 51. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Soluzione. 0

Esercizio 52. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x^2}{x^2-1}$

Soluzione. 0

Esercizio 53. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{1+x^2}{x^2-1}$

Soluzione. 0

Esercizio 54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x \cos x}$

Soluzione. 2

Esercizio 55. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Soluzione. $\frac{1}{2}$

Esercizio 56. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 5}{1 + 4e^x}$

Soluzione. $\frac{3}{4}$

Esercizio 57. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 5}{1 + 4e^x}$

Soluzione. -5

Esercizio 58. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-3x}{1-x}}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizio 59. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-3x}{1-x}}$

Soluzione. 0

Esercizio 60. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$

Soluzione. 7

Esercizio 61. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{e^x}$

Soluzione. 0

Esercizio 62. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^4 + x}{e^x}$

Soluzione. 0

Esercizio 63. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x-1}}{x^3 + 7}$

Soluzione. $+\infty$

Esercizi sulla continuità e sui limiti

Esercizio 1. Determinare le costanti a, b in modo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x - 1} + ax + b \right) = -2$$

Esercizio 2. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 0$?

Esercizio 3. Utilizzando il teorema di esistenza degli zeri, mostrare che esistono soluzioni delle seguenti equazioni: a) $x^5 - 3x + 4 = 0$ in $[-2, -1]$; b) $\ln(x^2 - 9) - 5x + 100 = 0$ in $[20, 25]$.

Esercizio 4. Determinare, se è possibile, il massimo e minimo assoluto delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato a fianco:

a) $f(x) = e^{\frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}}$ in $[0, 1]$;

b) $f(x) = \sin(x)$ in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$;

c) $f(x) = \sqrt{x+3}$ in $[0, 1]$.

Enunciare il teorema che assicura l'esistenza dei punti precedenti.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ a \ln(x + 2) + b, & 0 \leq x < 10 \\ 15, & x \geq 10 \end{cases}$$

trovare per quali valori di a, b è continua.

Studio parziale del grafico di una funzione

Determinare il dominio, le eventuali intersezioni con gli assi, il segno, le eventuali simmetrie particolari e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni (gli asintoti delle funzioni sono specificati nelle varie soluzioni).

Esercizio 1. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

Soluzione. $x = -2, x = 2$ asintoti verticali; $y = 0$ asintoto orizzontale.

Esercizio 2. $y = \frac{3x^2 + 7}{x^2 - 5x + 6}$

Soluzione. $x = 2$, $x = 3$ asintoti verticali; $y = 3$ asintoto orizzontale.

Esercizio 3. $y = \frac{x^2 - 4x}{1 - x}$

Soluzione. $x = 1$ asintoto verticale; $y = -x + 3$ asintoto obliquo

Esercizio 4. $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

Soluzione. $x = 5$ asintoto verticale; $y = x$ asintoto obliquo.

Esercizio 5. $y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x + 2}$

Soluzione. $x = -2$ asintoto verticale; $y = 2x - 6$ asintoto obliquo

Esercizio 6. $y = \frac{4x^2 - 8x - 5}{3x + 6}$

Soluzione. $x = -2$ asintoto verticale; $y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$ asintoto obliquo.

Esercizio 7. $y = x \cdot e^{-x}$

Soluzione. $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 8. $y = e^{\frac{x+1}{2x-2}}$

Soluzione. $x = 1$ asintoto verticale destro; $y = \sqrt{e}$ asintoto orizzontale.

Esercizio 9. $y = x - \sqrt{x^2 - 2x}$

Soluzione. $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$; $y = 2x - 1$ asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

Esercizio 10. $y = 2x - \sqrt{x^2 - 4}$

Soluzione. $y = x$ asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$; $y = 3x$ asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

Determinare il dominio, le eventuali intersezioni con gli assi, il segno, le eventuali simmetrie particolari e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni (senza soluzioni).

Esercizio 11. $y = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

Esercizio 12. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Esercizio 13. $y = \ln \frac{x-1}{x^2+4}$

Esercizio 14. $y = \ln \frac{x-1}{x^2-4}$

Esercizio 15. $y = \sqrt{x^2-6x}$

Esercizio 16. $y = \sqrt[3]{x^2-6x}$

Esercizio 17. $y = 2^{\frac{x-3}{x+2}}$

Esercizio 18. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+2}{x-8}}$

Esercizio 19. $y = \frac{1+\ln x}{\ln x}$

Esercizio 20. $y = \frac{\ln x}{2^x-4}$

Esercizio 21. $y = \frac{x+5}{\ln x}$

Esercizio 22. $y = \frac{e^x}{x^2-4x+3}$

Derivate (sfruttando la definizione)

Calcolare il rapporto incrementale delle seguenti funzioni nel punto x_0 e nell'incremento h segnato a fianco di ciascuna.

Esercizio 1. $y = 2x - x^3$ ($x_0 = 1$, $h = 1$)

Soluzione. -5

Esercizio 2. $y = \frac{2x-1}{x+1}$ ($x_0 = 0$, $h = 1$)

Soluzione. $\frac{3}{2}$

Esercizio 3. $y = e^{2x-1}$ ($x_0 = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$)

Soluzione. $4(\sqrt{e}-1)$

Esercizio 4. $y = 3 + \sqrt{x-3}$ ($x_0 = 3$, $h = 1$)

Soluzione. 1

Applicando la definizione di derivata, calcolare la derivata delle seguenti funzioni nel punto x_0 segnato a fianco di ciascuna.

Esercizio 5. $y = x^2 + 1$ ($x_0 = 0$)

Soluzione. 0

Esercizio 6. $y = \sqrt{x}$ ($x_0 = 4$)

Soluzione. $\frac{1}{4}$

Esercizio 7. $y = e^{2x} + 1$ ($x_0 = 0$)

Soluzione. 2

Esercizio 8. $y = \frac{2x - 3}{x}$ ($x_0 = 1$)

Soluzione. 3