

**Matematica ed Informatica+Fisica**  
**ESERCIZI Modulo di Matematica ed Informatica**

Corso di Laurea in CTF - anno acc. 2013/2014

docente: Giulia Giantesio, gntgli@unife.it

**ESERCIZI STILE ESAME**

**Esercizi sulla Probabilità**

**Esercizio 1.** In un ufficio il lavoro viene svolto nelle seguenti percentuali: il 30% dal signor  $X$ , il 25% dal signor  $Y$  e il 45% dal signor  $Z$ . Si sa che ogni pratica è preparata da un solo impiegato e che le pratiche preparate dai signori  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  contengono rispettivamente lo 0,01%, lo 0,005% e lo 0,003% di errori. Se una pratica presenta errori, qual è la probabilità che sia stata preparata dal signor  $X$ ? Se una pratica presenta errori, qual è la probabilità che sia stata preparata dal signor  $Z$ ?

**Soluzione.** Sia  $A$  l'evento che vi siano errori nella pratica. Abbiamo che  $P(X|A) \approx 0,536$  e  $P(Z|A) \approx 0,241$ .

**Esercizio 2.** Tre commissioni d'esame bocchiano in media con la seguente frequenza: la prima il 20% degli studenti, la seconda il 40% degli studenti, la terza il 65% degli studenti. Sapendo che uno studente è stato bocciato ( $B$ ), qual è la probabilità che sia stato esaminato dalla terza commissione? Sapendo che uno studente è stato promosso ( $P$ ), qual è la probabilità che sia stato esaminato dalla terza commissione?

**Soluzione.** Abbiamo che  $P(B|I) = 0,2$ ,  $P(B|II) = 0,4$ ,  $P(B|III) = 0,65$  e  $P(I) = P(II) = P(III) = \frac{1}{3}$ . Dunque, applicando il Teorema di Bayes, si ha  $P(III|B) = 0,52$ ;  $P(III|P) = 0,20$ .

**Esercizio 3.** Un'indagine medica ha stabilito che l'1% della popolazione è portatrice di una malattia. Si sa che un esame del sangue ha una precisione dell'85% nello stabilire la presenza o l'assenza della malattia: se una persona è portatrice della malattia la probabilità che il test sia positivo è 0,85, oppure se una persona non è portatrice della malattia la probabilità che il test sia negativo è 0,85. Scelta una persona a caso

- a) qual è la probabilità che il test sia positivo?
- b) se il test è positivo, qual è la probabilità che la persona sia portatrice o meno della malattia?

**Soluzione.** Siano  $B$  l'evento che la persona sia portatrice della malattia,  $\Omega \setminus B$  l'evento che la persona non sia portatrice della malattia,  $T_P$  l'evento che il test sia positivo e  $T_N$  l'evento che il test sia negativo. Per ipotesi abbiamo che

$$P(B) = 0,01 \quad P(T_P|B) = P(T_N|(\Omega \setminus B)) = 0,85.$$

- a) La probabilità che il test sia positivo è  $P(T_P) = 15,7\%$  (applicando la legge delle alternative e tenendo presente che  $P(T_P | (\Omega \setminus B)) = 1 - P(T_N | (\Omega \setminus B)) = 1 - 0,85 = 0,15$ ).
- b) Se il test è positivo, la probabilità che la persona sia portatrice della malattia è  $P(B | T_P) \approx 5,4\%$  (applicando il Teorema di Bayes), mentre la probabilità che la persona non sia portatrice della malattia è  $P((\Omega \setminus B) | T_P) = 1 - P(B | T_P) \approx 94,6\%$ .

Da questi risultati, poiché è molto bassa la probabilità di rivelare un vero portatore della malattia o è molto alta la probabilità di rivelare un falso portatore, deduciamo che l'esame del sangue considerato è poco affidabile.

**Esercizio 4.** Un'indagine medica su una malattia ha fornito i seguenti dati: la malattia è presente nell'1% della popolazione; la probabilità che, se una persona è malata, il test risulti positivo è  $P(T_P | M) = 80\%$ ; la probabilità che, se una persona è sana, il test risulti positivo è  $P(T_P | S) = 10\%$ . Scelta una persona a caso, qual è la probabilità che il test risulti positivo? Qual è la probabilità che, se il test risulta positivo, la persona è malata? Qual è la probabilità che, se il test risulta positivo, la persona è sana?

**Soluzione.**  $P(T_P) = 10,7\%$ ;  $P(M | T_P) \approx 7,5\%$ ;  $P(S | T_P) \approx 92,5\%$ . Questi ultimi dati sorprendenti sono dovuti al fatto che la malattia è abbastanza rara.

**Esercizio 5.** Una certa malattia colpisce il 4% degli italiani. Un test clinico ha fornito i seguenti dati: la probabilità che, se una persona è malata, il test risulti positivo è il 90%, mentre il test risulta positivo su soggetti sani nel 5% dei casi. Qual è la probabilità di non soffrire della malattia per una persona il cui test è risultato positivo?

**Soluzione.**  $P \approx 57,1\%$ .

**Esercizio 6.** Nel periodo natalizio tre ragazzi lavorano in un grande magazzino per impacchettare i regali. Riccardo prepara il 40% dei pacchetti, Elena impacchetta il 38% dei regali e Giovanni prepara i pacchi rimanenti. Sappiamo che la probabilità che un pacco preparato da Riccardo abbia l'etichetta del prezzo è 0,76%, la probabilità che un pacco preparato da Elena non abbia l'etichetta del prezzo è 79,76%, infine la probabilità che un pacco preparato da Giovanni non abbia l'etichetta del prezzo è 62%. Qual è la probabilità che ad un regalo acquistato ed impacchettato in questo grande magazzino non sia stata tolta l'etichetta del prezzo? Si supponga che un cliente scopra che ad un regalo da lui fatto ad amici ed impacchettato nel grande magazzino, non era stata tolta l'etichetta del prezzo. Qual è la probabilità che quel pacco sia stato impacchettato da Riccardo?

**Soluzione.** Sia  $A$  l'evento che si verifica se ad un regalo impacchettato non sia stata tolta l'etichetta del prezzo e sia  $R$  l'evento che si verifica se il regalo è stato impacchettato da Riccardo, allora abbiamo che  $P(A) \approx 16,36\%$  e  $P(R|A) \approx 1,86\%$ .

**Esercizio 7.** In una comunità il 10% degli individui con oltre 50 anni ha il diabete. La probabilità che un medico diagnostichi il diabete ad un individuo effettivamente malato è il 92%, mentre la probabilità che egli diagnostichi il diabete ad un individuo sano è il 3%. Qual è la probabilità che questo medico ad un adulto di oltre 50 anni scelto casualmente nella comunità diagnostichi il diabete? Supponendo che ad un individuo di oltre 50 anni della comunità il medico abbia diagnosticato il diabete, qual è la probabilità che non sia malato?

**Soluzione.** Sia  $D$  l'evento che si verifica se il medico diagnostica il diabete ad un adulto di oltre 50 anni della comunità e sia  $S$  l'evento che si verifica se un adulto di oltre 50 anni della comunità sia sano, allora abbiamo che  $P(D) \approx 11,9\%$  e  $P(S|D) \approx 22,69\%$ .

**Esercizio 8.** I laureati presso l'Università della città di  $XYZ$  nell'a.a. 2009-2010 si suddividono nelle seguenti percentuali: il 44% sono laureati in Ingegneria, il 36% in Farmacia e il rimanente in Filosofia. Sappiamo che le probabilità che un laureato in Ingegneria, Farmacia e Filosofia trovi lavoro entro un anno sono rispettivamente 90%, 76% e 49%. Qual è la probabilità che un laureato presso l'Università della città di  $XYZ$  nell'a.a. 2009-2010 trovi lavoro entro un anno? Sapendo che un laureato presso l'Università della città di  $XYZ$  nell'a.a. 2009-2010 ha trovato lavoro entro un anno, qual è la probabilità che sia laureato in Farmacia? Sapendo che un laureato presso l'Università della città di  $XYZ$  nell'a.a. 2009-2010 NON ha trovato lavoro entro un anno, qual è la probabilità che sia laureato in Filosofia?

**Soluzione.** Siano  $A, B, C$  gli eventi che si verificano rispettivamente se uno studente è laureato in Farmacia, in Filosofia e in Ingegneria. Sia  $L$  l'evento che si verifica se un laureato trova lavoro entro un anno dalla laurea e sia  $\bar{L}$  il suo complementare. Abbiamo che  $P(L) \approx 76,76\%$ ,  $P(A|L) \approx 35,64\%$ ,  $P(B|\bar{L}) \approx 43,89\%$ .

**Esercizio 9.** Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti ( $A, B$  e  $C$ ). Nello stabilimento  $A$  si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento  $B$  si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento  $C$  si produce il rimanente dei pezzi e il 5% di questi sono difettosi. Qual è la probabilità che un pezzo prodotto dall'azienda sia difettoso? Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento  $A$ ? Sapendo che un pezzo NON è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento  $C$ ?

**Soluzione.** Sia  $D$  l'evento che si verifica se un pezzo prodotto dall'azienda è difettoso e sia  $\bar{D}$  il suo complementare. Abbiamo che  $P(D) \approx 8,16\%$ ,  $P(A|D) \approx 61,27\%$ ,  $P(C|\bar{D}) \approx 17,24\%$ .

**Esercizio 10.** Supponiamo di considerare ovetti di cioccolato con sorprese numerate da 1 a 4. La probabilità di avere una delle 4 sorprese sia  $\frac{1}{4}$ .

- (1) Calcolare la probabilità di trovare almeno una sorpresa 1 comperando 4 ovetti.
- (2) Calcolare la probabilità di trovare 3 sorprese diverse comperando 4 ovetti.
- (3) Trovare quanti ovetti bisogna comperare per avere una probabilità  $\geq 0.9$  di trovare almeno una volta la sorpresa 1.

**Soluzione.** 68 %, 37.5 %, 8.

**Esercizio 11.** Calcolare la probabilità di avere almeno 2 volte testa lanciando una moneta truccata 4 volte.

**Soluzione.**  $\frac{11}{16}$

**Esercizio 12.** Un'urna contiene 10 palline: 3 bianche e 7 nere. Estraiamo a caso 3 palline (una alla volta):

- (1) con reimbussolamento,
- (2) senza reimbussolamento.

Qual è la probabilità di avere 0,1,2,3 palline bianche?