Matematica ed Informatica+Fisica
ESERCIZI Modulo di Matematica ed Informatica
Corso di Laurea in CTF - anno acc. 2013/2014
docente: Giulia Giantesio, gntgli@unife.it

Esercizi 12: Statistica Induttiva

Uso delle tavole della distribuzione normale.

Esercizio 1. L'altezza dei figli di un uomo alto 180 centimetri è normalmente distribuita con media 182 e varianza 10. Qual è la probabilità che il figlio dell'uomo:
a) abbia un'altezza compresa tra 180 e 184 cm?
b) superi i 185 cm di altezza?

Soluzione.
a) Abbiamo che:

$$P(180 \le X \le 184) = P\Big(\frac{180-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{184-\mu}{\sigma}\Big) = P\Big(-\frac{2}{\sqrt{10}} \le Z \le \frac{2}{\sqrt{10}}\Big) =$$

$$= 2P\Big(Z \le \frac{2}{\sqrt{10}}\Big) - 1 = 2\Phi(0.63) - 1 = 2 \cdot (0.7357) - 1 = 0.4714 = 47.14\%$$

b) Abbiamo che:

$$P(X > 185) = 1 - P(X \le 185) = 1 - P\Big(Z \le \frac{185-\mu}{\sigma}\Big) =$$

$$= 1 - P\Big(Z \le \frac{3}{\sqrt{10}}\Big) = 1 - \Phi(0.95) = 1 - 0.8289 = 0.1711 = 17.11\%$$

Esercizio 2. L'altezza media (in cm) di un bambino di 7 mesi è normalmente distribuita con $\mu = 71$ e $\sigma^2 = 6.25$. Qual è la percentuale di bambini di 7 mesi che superano i 74 cm di altezza?

Soluzione. $P(X > 74) = 1 - P(X \le 74) = 0.1151 = 11.51\%$

Esercizio 3. Un processo produce cuscinetti i cui diametri sono normalmente distribuiti con $\mu = 2.505\,\mathrm{cm}$ e $\sigma = 0.008\,\mathrm{cm}$. Affinché un cuscinetto possa essere utilizzato, è necessario che il suo diametro sia compreso tre 2.49 e 2.51 cm. Quale percentuale dei cuscinetti non potrà essere utilizzata?

Soluzione. Troviamo la percentuale dei cuscinetti che potrà essere utilizzata:

$$P(2.49 \le X \le 2.51) = P\Big(\frac{2.49-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{2.51-\mu}{\sigma}\Big) =$$

$$= P(-1.875 \le Z \le 0.625) = \Phi(0.625) - \Phi(-1.875) = \Phi(0.625) - (1 - \Phi(1.875)) =$$

$$= 0.7357 - (1 - 0.9699) = 0.7056 = 70.56\%.$$

Dunque non potranno essere utilizzati il 29.44% dei cuscinetti.

Esercizio 4. Il peso di certe confezioni alimentari prodotte in modo automatico è una variabile aleatoria normale X con $\mu = 250\,\text{g}$ e $\sigma = 3\,\text{g}$. Calcolare la probabilità che una confezione:

a) pesi meno di 245 g;
b) pesi più di 250 g;
c) abbia un peso tra 247 g e 253 g.

Soluzione.

a) $P(X < 245) = P(Z < -1.67) = \Phi(-1.67) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475 = 4.75\%$;
b) $P(X > 250) = P(Z > 0) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 0.5 = 50\%$;
c) $P(247 < X < 253) = P(-1 < Z < 1) = 2P(Z < 1) - 1 = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826 = 68.26\%$.

Intervalli di confidenza per la media.

Esercizio 1. La caratteristica X di una popolazione è normalmente distribuita con varianza $\sigma^2 = 4$. Si estrae un campione casuale di $n = 36$ osservazioni indipendenti. Dal campionamento si ottiene il valore $\overline{x} = 13.8$ per la media campionaria. Calcolare un intervallo di confidenza al 95% per la media μ di X.

Soluzione. Sia Z una variabile aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$, dobbiamo trovare z tale che $P(-z < Z < z) = 0.95$. Poiché $P(-z < Z < z) = 2P(Z < z) - 1$, abbiamo che:

$$2P(Z < z) - 1 = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(Z < z) = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1.96.$$

Quindi:

$$0.95 = P(-1.96 < Z < 1.96) = P\Big(-1.96 < \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.96\Big) =$$

$$= P\Big(-1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} - \mu < 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = P\Big(\overline{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) =$$

$$= P\Big(13.8 - 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{36}} < \mu < 13.8 + 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{36}}\Big) = P(13.15 < \mu < 14.45).$$

Dunque $\mu \in (13.15; 14.45)$ al 95%.

Esercizio 2. Tra i pasticcini prodotti artigianalmente in una pasticceria se ne prelevano $n = 100$; risulta che il loro peso medio è pari a 35 g. Si sa che lo scarto quadratico medio del peso di tutti i pasticcini prodotti è pari a 4 g. Si trovi l'intervallo di confidenza al 98% per il peso medio di tutti i pasticcini prodotti.

Soluzione. Per il livello di confidenza del 98% si ha $z = 2.32$ e $\mu \in (34.07; 35.93)$.

Esercizio 3. Una partita di bulloni presenta un diametro medio μ incognito; la varianza del diametro dei bulloni è pari a 0.01 cm. Si estrae un campione di 1000 bulloni, sui quali si osserva un diametro medio pari a 1.2 cm. Determinare l'intervallo di confidenza per μ al 97%.

Soluzione. Per il livello di confidenza del 97% si ha $z = 2.17$ e $\mu \in (1.193; 1.207)$.

Esercizio 4. Il numero medio di battiti cardiaci al minuto X per una certa popolazione è normalmente distribuita con $\sigma = 10$. Si estrae un campione casuale di $n = 49$ soggetti. Dal campionamento si ottiene il valore medio $\overline{x} = 90$. Trovare gli intervalli di confidenza al 90%, 95% e al 99% per la media μ di X.

Soluzione. Per il grado di fiducia del 90% si ha $z = 1.64$ e $\mu \in (87.66; 92.34)$.
Per il grado di fiducia del 95% si ha $z = 1.96$ e $\mu \in (87.20; 92.80)$.
Per il grado di fiducia del 99% si ha $z = 2.57$ e $\mu \in (86.33; 93.67)$.

Esercizio 5. Un liceo vuole determinare il voto medio in Matematica dei suoi studenti a fine anno scolastico. A tale scopo, si estrae un campione casuale di 200 studenti del liceo e se ne rilevano i voti finali in Matematica, ottenendo i seguenti dati:

Voto in Matematica	3	4	5	6	7	8	9
Numero Studenti	20	36	42	54	24	18	6

a) Calcolare media, moda, mediana, varianza e scarto quadratico medio dei dati raccolti.
b) Sapendo che "voti degli studenti" è una variabile normalmente distribuita, determinare in base ai dati raccolti un intervallo di confidenza al 97% per il voto medio μ di tutti gli studenti del liceo.

Soluzione.

a) $\overline{x} = 5.52$; moda $= 6$; $\widetilde{x} = 6$; $s^2 \approx 2.36$; $s \approx 1.55$.
b) $\mu \in (5.28; 5.75)$ al 97%.