Matematica ed Informatica+Fisica
ESERCIZI Modulo di Matematica ed Informatica
Corso di Laurea in CTF - anno acc. 2013/2014
docente: Giulia Giantesio, gntgli@unife.it

Esercizi 11: Calcolo Integrale

Integrali indefiniti. Calcolare i seguenti integrali indefiniti, verificando i risultati indicati.

Esercizio 1. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + c$

Esercizio 2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}} + c = \frac{3}{11}x^3\,\sqrt[3]{x^2} + c$

Esercizio 3. $\displaystyle\int (4x^5+3x^4-2x^3+3x^2-7x+2)\,dx = \frac{2}{3}x^6+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+c$

Esercizio 4. $\displaystyle\int \left(\sqrt[5]{x} - \frac{5}{x^3} - 3\,\sin x + \frac{9}{x}\right) dx = \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + \frac{5}{2x^2} + 3\,\cos x + 9\,\ln|x| + c$

Esercizio 5. $\displaystyle\int \left(4\,\cos x - \frac{6}{x^2+1} + 2\,e^x - \frac{1}{x^4}\right) dx = 4\,\sin x - 6\,\mathrm{arctg}\,x + 2\,e^x + \frac{1}{3x^3} + c$

Esercizio 6. $\displaystyle\int (2x+1)^7\,dx = \frac{1}{16}\,(2x+1)^8 + c$

Esercizio 7. $\displaystyle\int x\,(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{8}\,(x^2+1)^4 + c$

Esercizio 8. $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos x\,dx = \frac{1}{3}\,\sin^3 x + c$

Esercizio 9. $\displaystyle\int x\,\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\,\sqrt{(1-x^2)^3} + c$

Esercizio 10. $\displaystyle\int \sin x\,\cos^4 x\,dx = -\frac{1}{5}\,\cos^5 x + c$

Esercizio 11. $\displaystyle\int (2x-1)\cdot(x^2-x)^3\,dx = \frac{1}{4}\,(x^2-x)^4 + c$

Esercizio 12. $\displaystyle\int (2x^3+1)\cdot\sqrt{x^4+2x}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^4+2x)^3} + c$

Esercizio 13. $\displaystyle\int \sqrt{3-x}\,dx = -\frac{2}{3}\,\sqrt{(3-x)^3} + c$

Esercizio 14. $\displaystyle\int x\,\sqrt[3]{4+x^2}\,dx = \frac{3}{8}\,\sqrt[3]{(4+x^2)^4}+c$

Esercizio 15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+x}}\,dx = 2\,\sqrt{2+x}+c$

Esercizio 16. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\sqrt{9-x^2}+c$

Esercizio 17. $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\,\ln|3x+2|+c$

Esercizio 18. $\displaystyle\int \frac{1}{1-6x}\,dx = -\frac{1}{6}\,\ln|1-6x|+c$

Esercizio 19. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+10}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln|x^2+10|+c$

Esercizio 20. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln|x^2+4x+1|+c$

Esercizio 21. $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-6x}\,dx = \frac{1}{3}\,\ln|x^3-6x|+c$

Esercizio 22. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+5}\,dx = x-6\,\ln|x+5|+c$

Esercizio 23. $\displaystyle\int \frac{x-4}{x-2}\,dx = x-2\,\ln|x-2|+c$

Esercizio 24. $\displaystyle\int \frac{1-x}{x+3}\,dx = -x+4\,\ln|x+3|+c$

Esercizio 25. $\displaystyle\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\,e^{-3x}+c$

Esercizio 26. $\displaystyle\int x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2}+c$

Esercizio 27. $\displaystyle\int e^{2-x}\,dx = -e^{2-x}+c$

Esercizio 28. $\displaystyle\int x^2\cdot e^{x^3+4}\,dx = \frac{1}{3}\,e^{x^3+4}+c$

Integrali di funzioni razionali fratte. Calcolare i seguenti integrali, verificando i risultati indicati.

Esercizio 1. $\displaystyle\int \frac{x-16}{x^2-2x-8}\,dx = 3\,\ln|x+2|-2\,\ln|x-4|+c$

Esercizio 2. $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2-3x+2}\,dx = \ln|x-1| + 2\ \ln|x-2| + c$

Esercizio 3. $\displaystyle\int \frac{12x+27}{x^2+x-12}\,dx = 3\ \ln|x+4| + 9\ \ln|x-3| + c$

Esercizio 4. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2-4}\,dx = \frac{9}{4}\ \ln|x-2| - \frac{1}{4}\ \ln|x+2| + c$

Esercizio 5. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+25}\,dx = \ln(x^2+25) + \frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{x}{5} + c$

Esercizio 6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx = \frac{1}{3}\ \ln|x-4| - \frac{1}{3}\ \ln|x-1| + c$

Esercizio 7. $\displaystyle\int \frac{x^2-6x+4}{x^2+2x+4}\,dx = x - \ln(x^2+2x+4) + \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}\right) + c$

Esercizio 8. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+12x+9}\,dx = \frac{-1}{2(2x+3)} + c$

Integrali per sostituzione. Calcolare i seguenti integrali per sostituzione, verificando i risultati indicati (tra parentesi si trova a volte indicata la sostituzione più conveniente).

Esercizio 1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\,dx = 2\mathrm{arctg}\sqrt{x} + c \qquad (\sqrt{x} = t)$

Esercizio 2. $\displaystyle\int \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}\,dx = e^{\mathrm{tg}x} + c$

Esercizio 3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = x - \ln(1+e^x) + c \qquad (t = e^x)$

Esercizio 4. $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + c \qquad (\sin x = t)$

Esercizio 5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}\,dx = 2\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1} + c$

Esercizio 6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx = \frac{3}{64}(2x+1)^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{20}(2x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{16}(2x+1)^{\frac{2}{3}} + c \qquad (t = \sqrt[3]{2x+1})$

Esercizio 7. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln^2 x + 4\ln x + 5)}\,dx = \mathrm{arctg}(\ln x + 2) + c$

Regola di integrazione per parti. Calcolare i seguenti integrali per parti, verificando i risultati indicati.

Esercizio 1. $\displaystyle\int x\,\cos x\,dx = x\,\sin x + \cos x + c$

Esercizio 2. $\displaystyle\int x\,\ln x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2\,\ln x - \frac{1}{4}\,x^2 + c$

Esercizio 3. $\displaystyle\int x^2\,\ln x\,dx = \frac{1}{3}\,x^3\,\ln x - \frac{1}{9}\,x^3 + c$

Esercizio 4. $\displaystyle\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c$

Esercizio 5. $\displaystyle\int x\,e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}x\,e^{-2x} - \frac{1}{4}\,e^{-2x} + c$

Esercizio 6. $\displaystyle\int x\,e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1) + c$

Esercizio 7. $\displaystyle\int x^3\,e^x\,dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

Esercizio 8. $\displaystyle\int x^2\,\cos x\,dx = x^2\,\sin x + 2x\,\cos x - 2\,\sin x + c$

Esercizio 9. $\displaystyle\int x^2\,\sin x\,dx = -x^2\,\cos x + 2x\,\sin x + 2\,\cos x + c$

Esercizio 10. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\sin x\,\cos x + \frac{1}{2}x + c$

Esercizio 11. $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + c$

Esercizio 12. $\displaystyle\int e^x\,\sin x\,dx = \frac{1}{2}\,e^x(\sin x - \cos x) + c$

Esercizio 13. $\displaystyle\int e^x\,\cos x\,dx = \frac{1}{2}\,e^x(\sin x + \cos x) + c$

Esercizio 14. $\displaystyle\int e^{2x}\,\cos x\,dx = \frac{1}{5}\,e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + c$

Integrali definiti. Calcolare i seguenti integrali definiti, verificando i risultati indicati.

Esercizio 1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+4)\,dx = \frac{26}{3}$

Esercizio 2. $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+2x)\,dx=0$

Esercizio 3. $\displaystyle\int_{0}^{2} e^{x+2}\,dx=e^4-e^2$

Esercizio 4. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\sqrt[5]{x}\,dx=-\frac{5}{6}$

Esercizio 5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Esercizio 6. $\displaystyle\int_{0}^{2}(x^2-3x+1)\,dx=-\frac{4}{3}$

Esercizio 7. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x+4)\,\cos x\,dx=-5-\frac{\pi}{2}$

Esercizio 8. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(x-1)\,\sin x\,dx=-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

Esercizio 9. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6}(x+2)\,\sin x\,d\,x=-\frac{\sqrt{3}}{12}\,\pi-\sqrt{3}+\frac{5}{2}$

Esercizio 10. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6}(x-6)\,\cos x\,d\,x=\frac{\pi}{12}-4+\frac{\sqrt{3}}{2}$

Esercizio 11. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x+3)\,\sin x\,d\,x=4$

Esercizio 12. $\displaystyle\int_{0}^{1}\ln(1+x^2)\,dx=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$

Esercizio 13. $\displaystyle\int_{-1}^{0}x\,e^{-3x}\,dx=-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\,e^3$

Esercizio 14. $\displaystyle\int_{0}^{2}x\,e^{4x}\,dx=\frac{1}{16}+\frac{7}{16}\,e^8$

Esercizio 15. $\displaystyle\int_{-4}^{1}\ln(x+5)\,dx=6\,\ln 6-5$

Esercizio 16. $\displaystyle\int_{3}^{5}\ln(x-2)\,dx=-2+3\,\ln 3$

Esercizio 17. $\displaystyle\int_5^7 \ln(x-4)\,d\,x = 3\,\ln 3 - 2$

Esercizio 18. $\displaystyle\int_6^9 \ln\,(x-5)\,d\,x = 4\,\ln 4 - 3$

Esercizio 19. $\displaystyle\int_{-5}^1 \ln\,(x+6)\,d\,x = 7\,\ln 7 - 6$

Esercizio 20. $\displaystyle\int_1^2 \ln(2x-1)\,dx = \Big[x\,\ln(2x-1) - x - \frac{1}{2}\,\ln(2x-1)\Big]_{x=1}^{x=2} = \frac{3}{2}\,\ln 3 - 1$

Esercizio 21. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-9x+20}\,dx = 16\,\ln 2 - 9\,\ln 3$

Esercizio 22. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x-3}{x^2+x-2}\,dx = \frac{7}{3}\,\ln 2$

Esercizio 23. $\displaystyle\int_{-2}^5 \frac{3x-2}{x^2-3x-18}\,dx = -\frac{5}{3}\,\ln 2$

Esercizio 24. $\displaystyle\int_1^6 \frac{x-4}{x^2-7x}\,dx = \frac{1}{7}\,\ln 6$

Esercizio 25. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+4}\,dx = 3\,\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$

Esercizio 26. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+6x+9}\,dx = 2\,\ln|x+3| + \frac{3}{x+3} + c$

Esercizio 27. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{2x-1}{x^2+10x+25}\,dx = 2\,\ln 3 - \frac{22}{3}$

Esercizio 28. $\displaystyle\int_5^8 \frac{x-1}{x^2-8x+16}\,dx = \ln 4 + \frac{9}{4}$

Esercizio 29. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+9}\,dx = \ln(x^2+9) + \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{x}{3}\right) + c$

Esercizio 30. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x-3}{x^2+2}\,dx = \ln 2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}$

Integrali generalizzati. Calcolare i seguenti integrali generalizzati, verificando i risultati indicati.

Esercizio 1. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx \quad \text{diverge}$

Esercizio 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ indeterminato

Esercizio 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{1}{5}\ln 6$

Esercizio 4. $\displaystyle\int_0^1 (x\ln x + x)\,dx = \frac{1}{4}$

Esercizio 5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \frac{5}{3}$

Esercizio 6. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx = 3\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

Esercizio 7. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x-1}\,dx$ diverge

Esercizi stile esame.

Esercizio 1. Dopo aver calcolato

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx,$$

spiegare la differenza tra i tre seguenti integrali:

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^2-2}{x^2-4x}\,dx.$$

Esercizio 2. Studiare la funzione

$$f(x) = x\ln^2(2x)$$

fino alla derivata seconda e tracciarne il grafico. Indicare gli eventuali punti di minimo, di massimo (sono relativi o assoluti?) e di flesso.

Facendo riferimento alla funzione precedente

a) determinare la primitiva di $f(x)$ che in $x = \frac{1}{2}$ vale 1.

b) fornire un esempio di integrale indefinito, definito e generalizzato di $f(x)$ (per questo punto si spieghi la differenza tra i tre integrali aiutandosi, quando è possibile, con il grafico della funzione).