

LABORATORIO DI INFORMATICA

0011

"Dio non gioca a dadi con l'Universo."
(René Descartes, *Cartesio "Discorso sul metodo"*)

Giorgio Poletti

giorgio.poletti@unife.it – <http://docente.unife.it/giorgio.poletti>



Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0 Anche la scelta degli esami da sostenere all'università...

Contesti di applicazione: ottimizzare la realizzazione della rete idrica, collegamento, meno dispendioso, in termini di potenza dissipata, per realizzare un circuito elettrico.

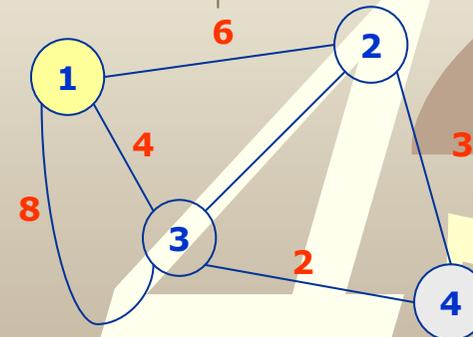
Premesse e notazioni

- Grafo con n nodi distinti
- Nodi numerati (1 partenza, n arrivo)
- Archi "pesati" e indicato $p(j,k)$
- etichetta $f(i)$ peso del cammino per giungere al nodo i
- etichetta $J(i)$ nodo che precede il nodo i nel cammino minimo
- S insieme dei nodi etichettati
- T l'insieme dei nodi non etichettati

Trovare il percorso minimo tra due punti considerati rispettivamente partenza e arrivo... il più breve, il più rapido, il più economico...

Esempi

$S = \{1\}$, $T = \{2,3,4\}$
 $p(1,2) = 6$
 $f(3) = 4$
 $J(3) = 1$



Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

Descrizione Algoritmica

(in figura il grafo di riferimento)

Inizializzazione

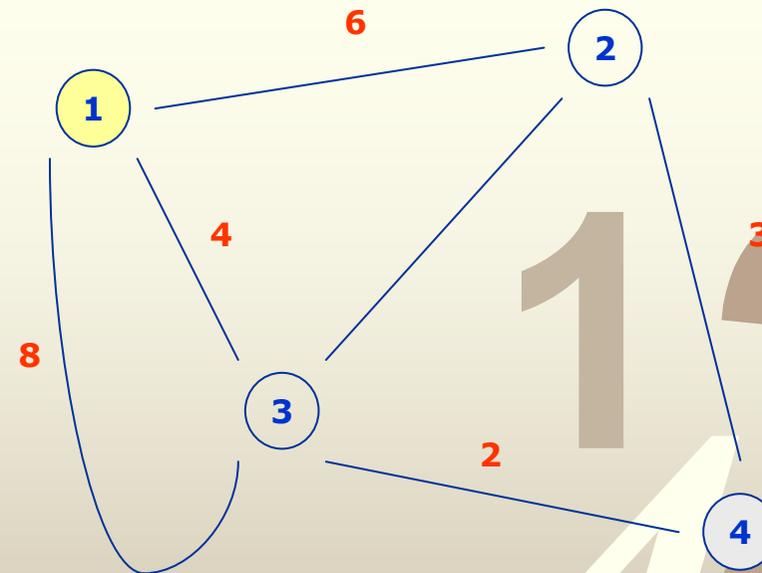
- $S=\{1\}$, $T=\{2,3,4\}$, $f(1)=0$, $J(1)=0$
- $f(i)=p(1,i)$, $J(i)=1$ per tutti i nodi adiacenti a 1
- $f(i) = \infty$ (*infinito*) per tutti gli altri nodi

Assegnazione di etichetta permanente

- Se $f(i) = \infty$, per ogni i in $T \Rightarrow$ **STOP**
- Si trova j per cui $f(j) = \min f(i)$ di tutti gli i in T
- $T=T-\{j\}$ e $S=S \cup \{j\}$
- Se $T=\emptyset$ **STOP**

Assegnazione di etichetta provvisoria

- Per ogni i in T , adiacente a j per cui $f(i) > f(j) + p(i,j)$
 - $f(i) = f(j) + p(i,j)$
 - $J(i) = j$
- Si torna alla procedura "Assegnazione di etichetta permanente"



Teoria dei Grafi

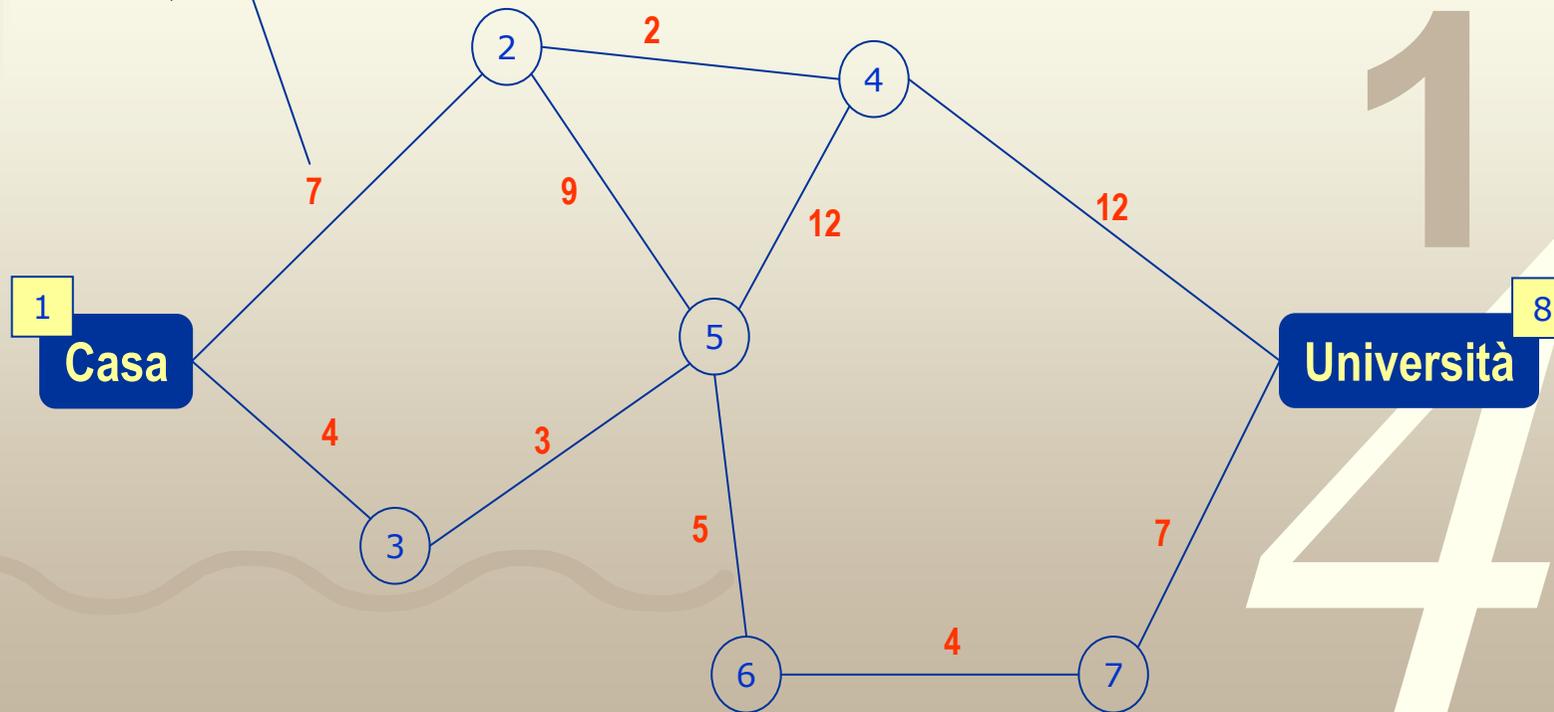
Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università

Potenziale

$p(1,2)=7$



Grafo schema del problema

Teoria dei Grafi

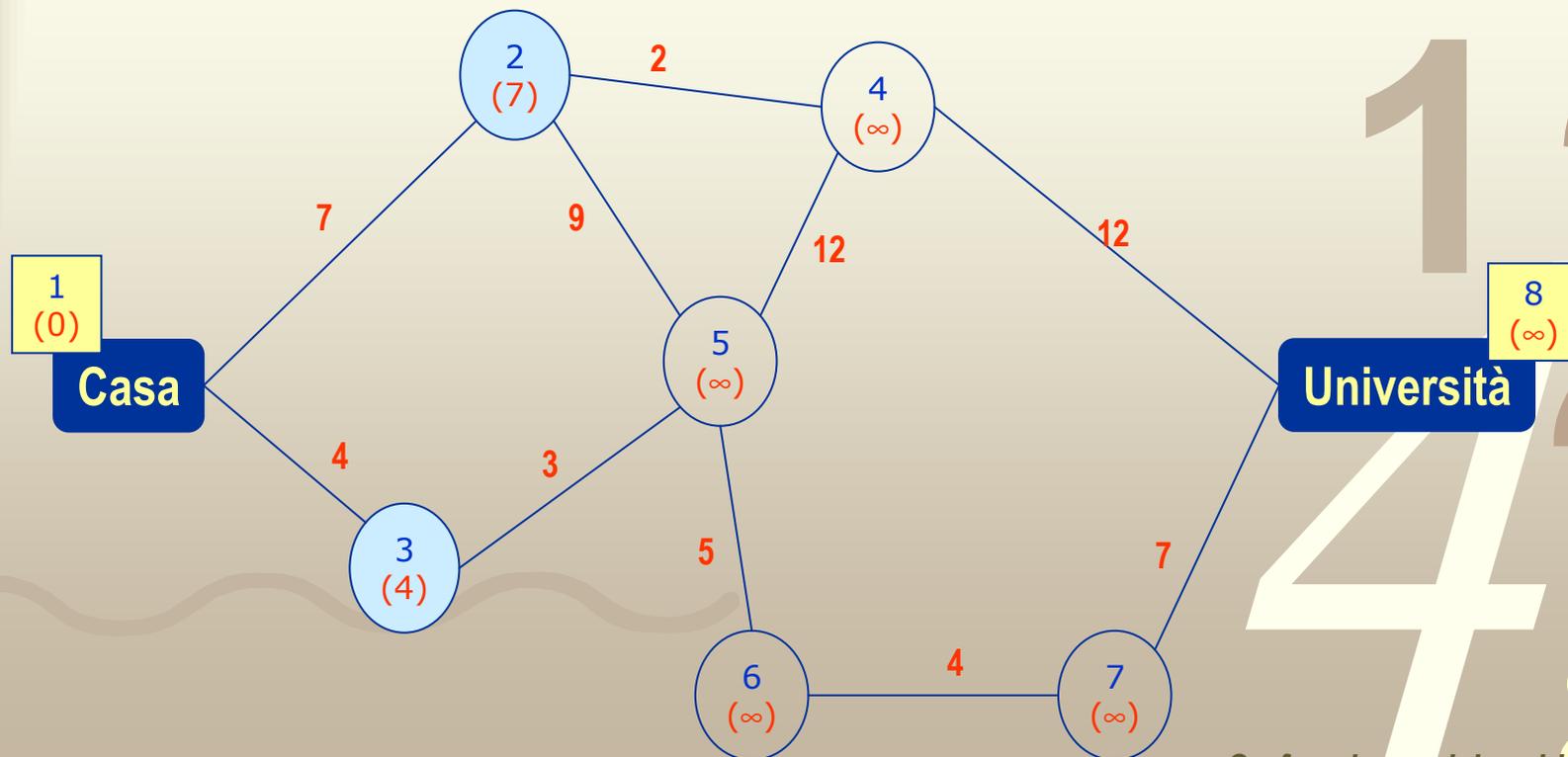
Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università

Inizializzazione

$S=\{1\}$, $T=\{2,3,4,5,6,7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$



Grafo schema del problema

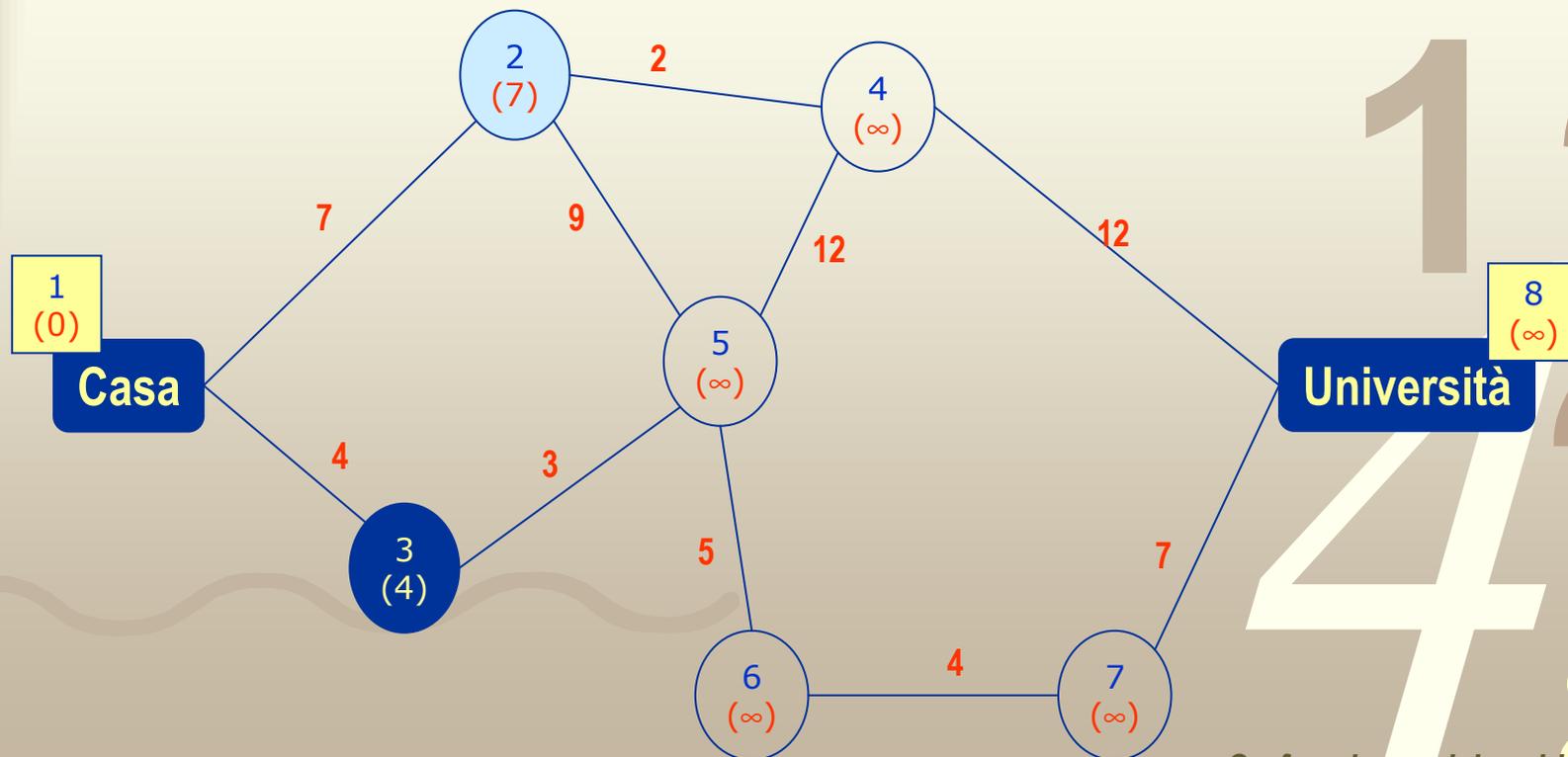
Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università
Assegnazione di etichetta permanente

$S=\{1,2,3\}$, $T=\{4,5,6,7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$



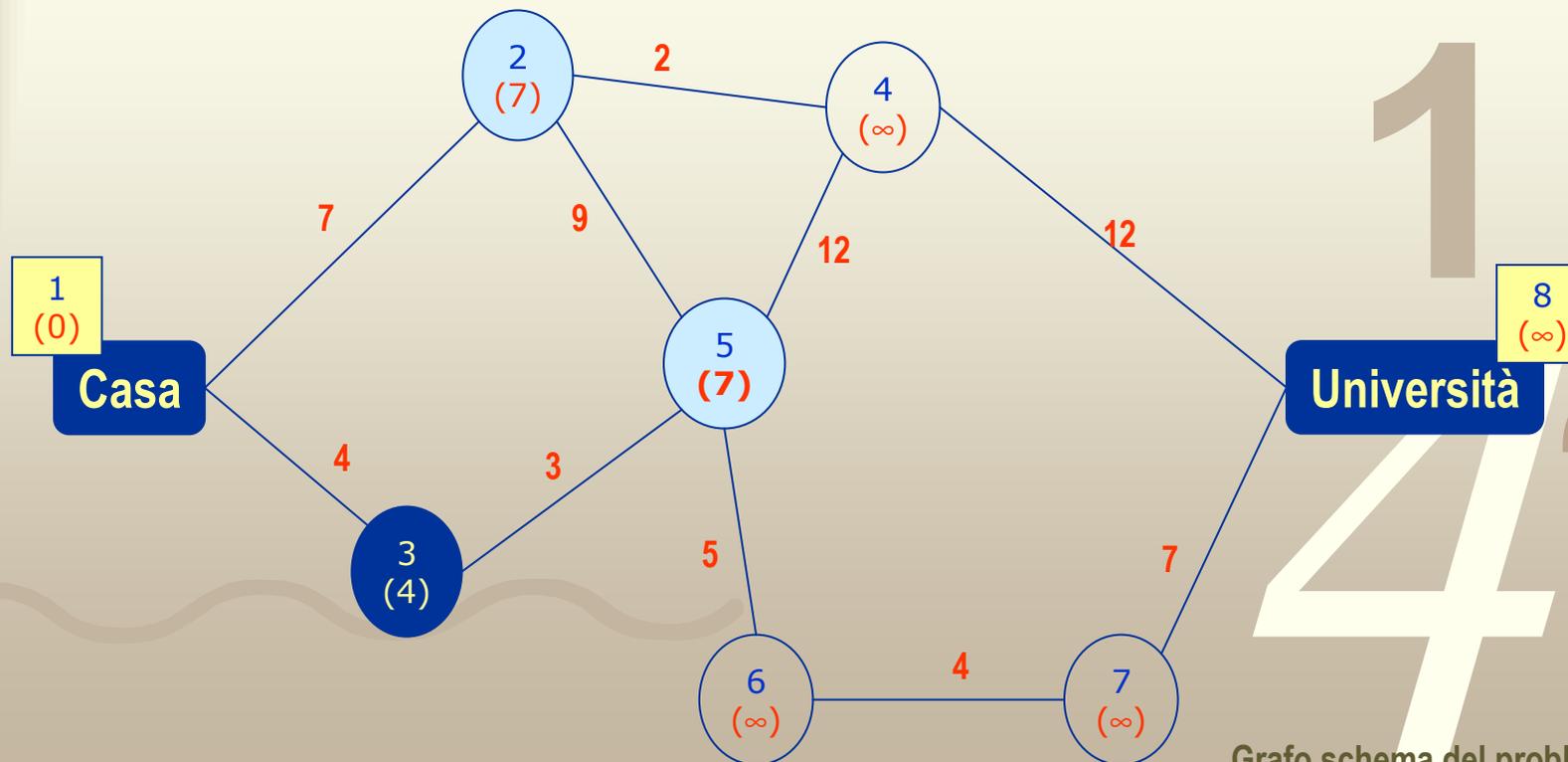
Grafo schema del problema

Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0014 Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università
Assegnazione di etichetta provvisoria

$S=\{1,2,3\}$, $T=\{4,5,6,7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$
 $J(5)=3$



Teoria dei Grafi

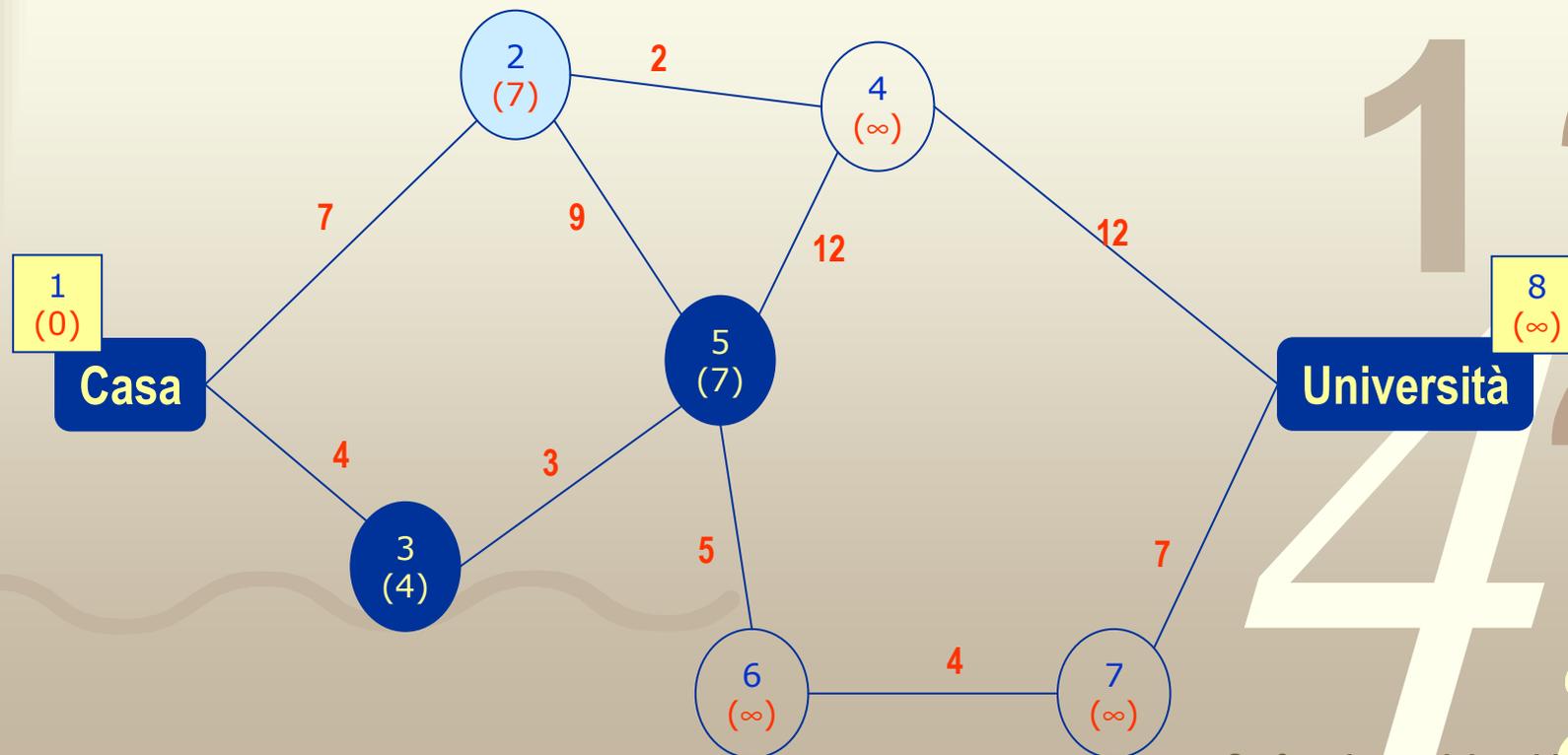
Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università

Assegnazione di etichetta permanente

$S=\{1,2,3,5\}$, $T=\{4,6,7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$
 $J(5)=3$



Grafo schema del problema

Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

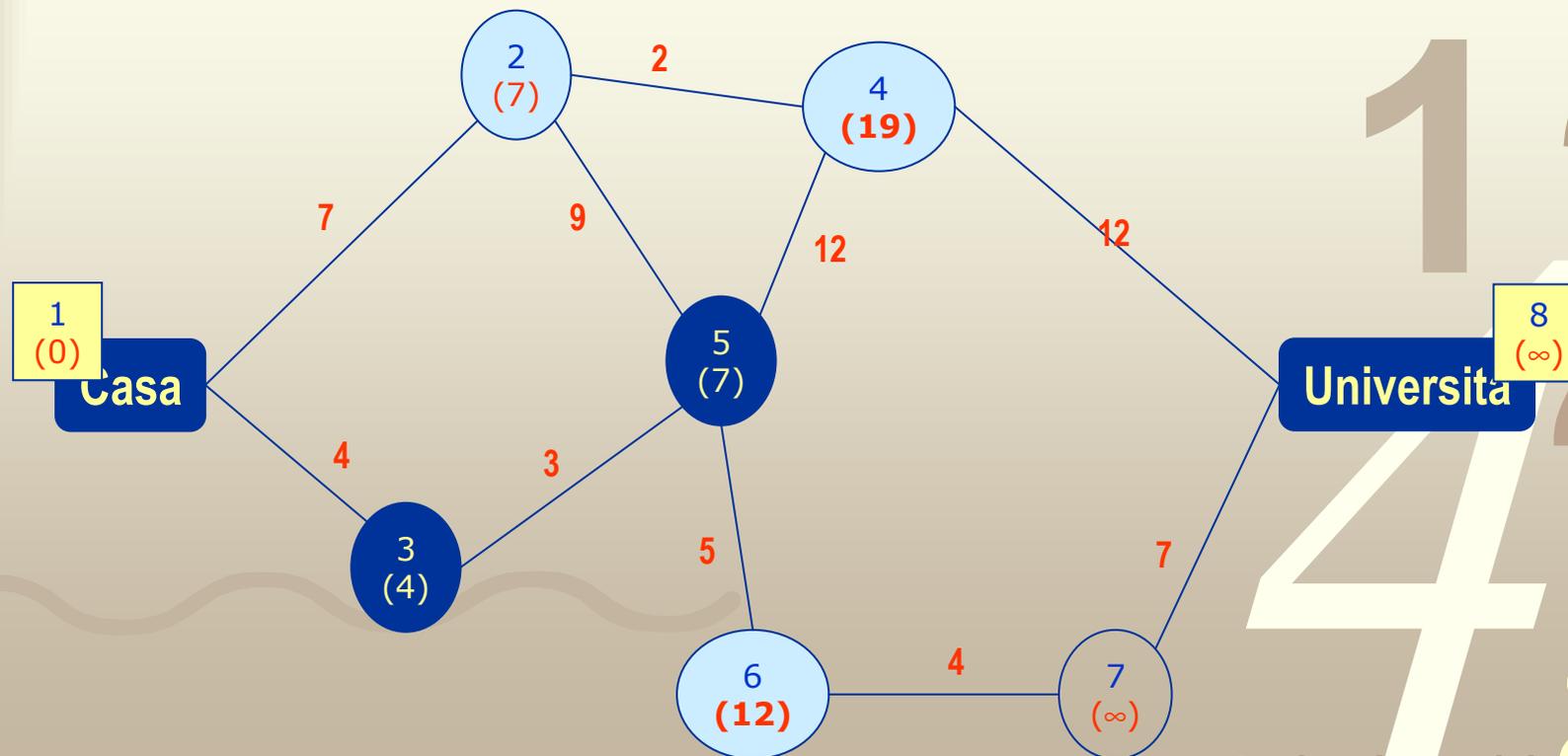
Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università

Assegnazione di etichetta provvisoria

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$, $T=\{7,8\}$

$J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$

$J(5)=3$ $J(4)=5$ $J(6)=5$



Grafo schema del problema

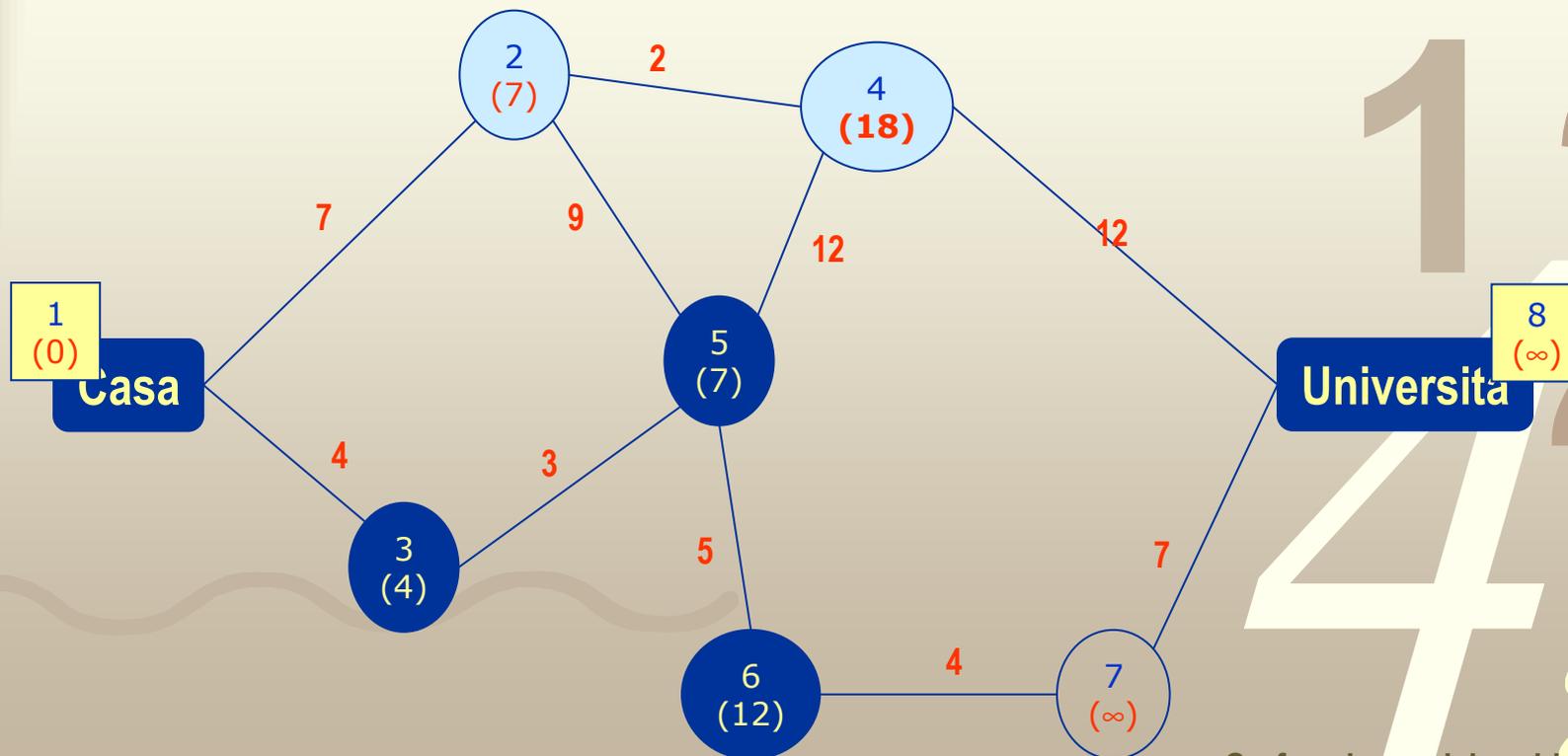
Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università
Assegnazione di etichetta permanente

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$, $T=\{7,8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$
 $J(5)=3$ $J(4)=5$ $J(6)=5$



Grafo schema del problema

Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

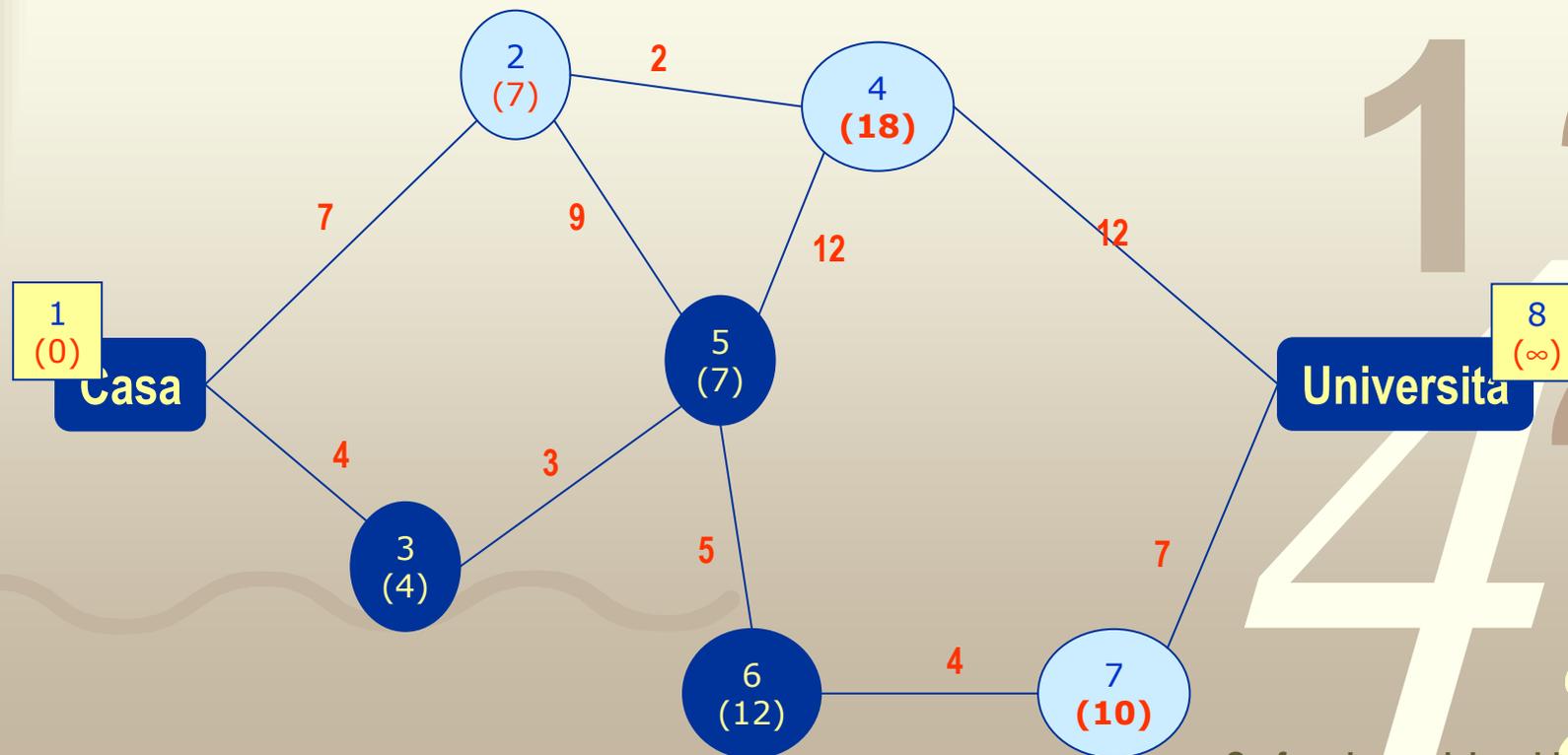
Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università

Assegnazione di etichetta provvisoria

$S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $T=\{8\}$

$J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$

$J(5)=3$ $J(4)=5$ $J(6)=5$ $J(7)=6$



Grafo schema del problema

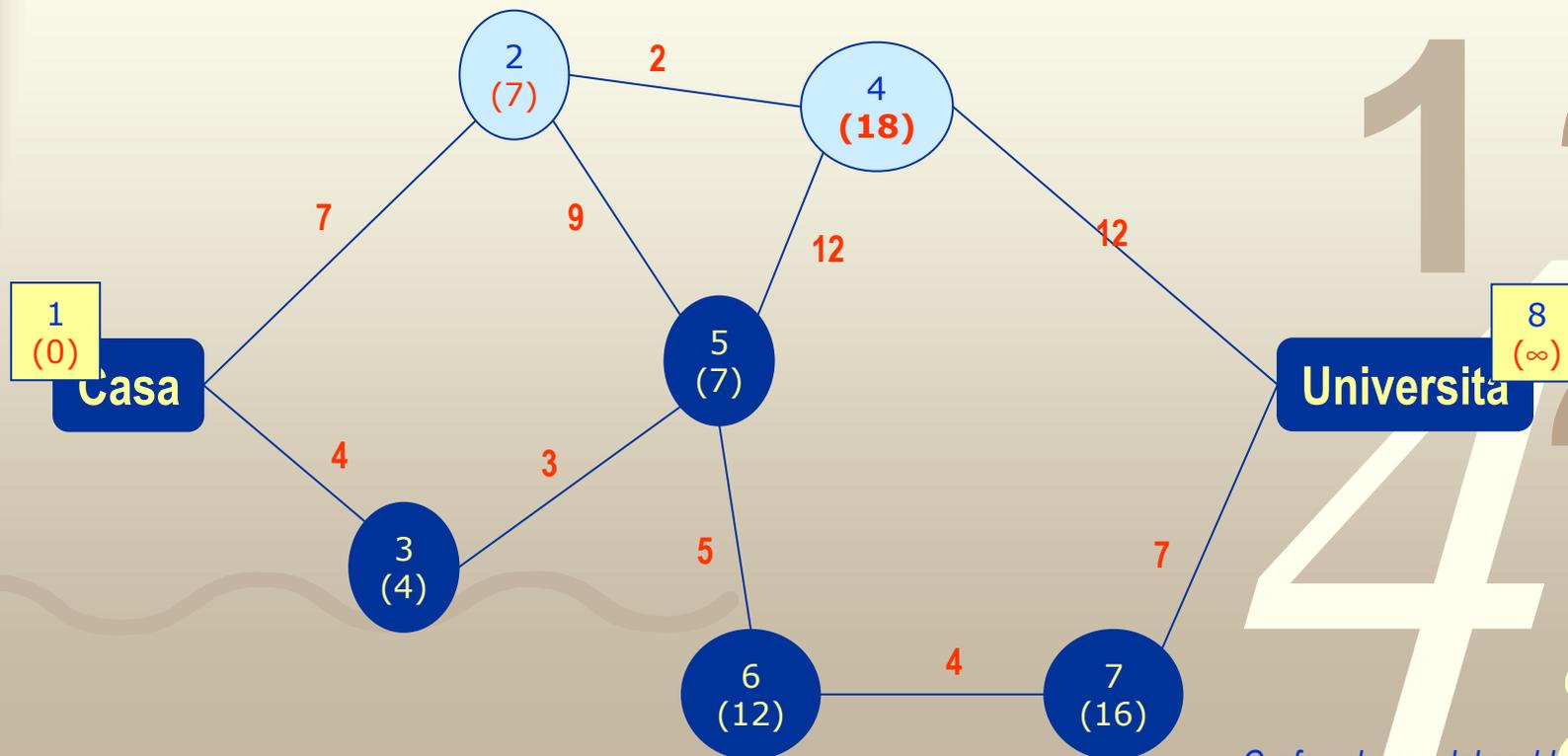
Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università
Assegnazione di etichetta permanente

$S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $T=\{8\}$
 $J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$
 $J(5)=3$ $J(4)=5$ $J(6)=5$ $J(7)=6$



Grafo schema del problema

Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università

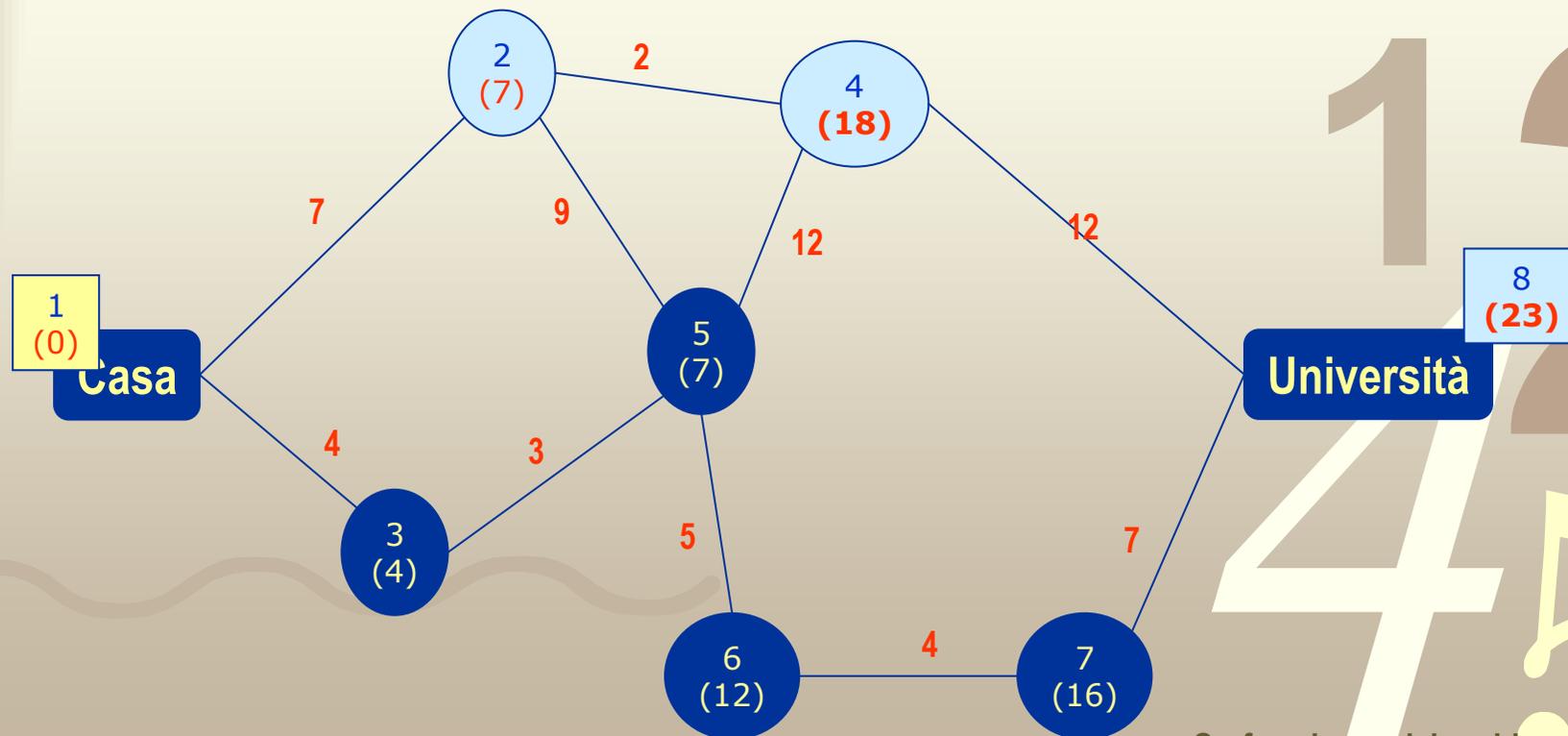
Assegnazione di etichetta provvisoria

$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $T=\{\emptyset\}$

$J(1)=0$ $J(2)=1$ $J(3)=1$

$J(5)=3$ $J(4)=5$ $J(6)=5$ $J(7)=6$

$J(8)=7$



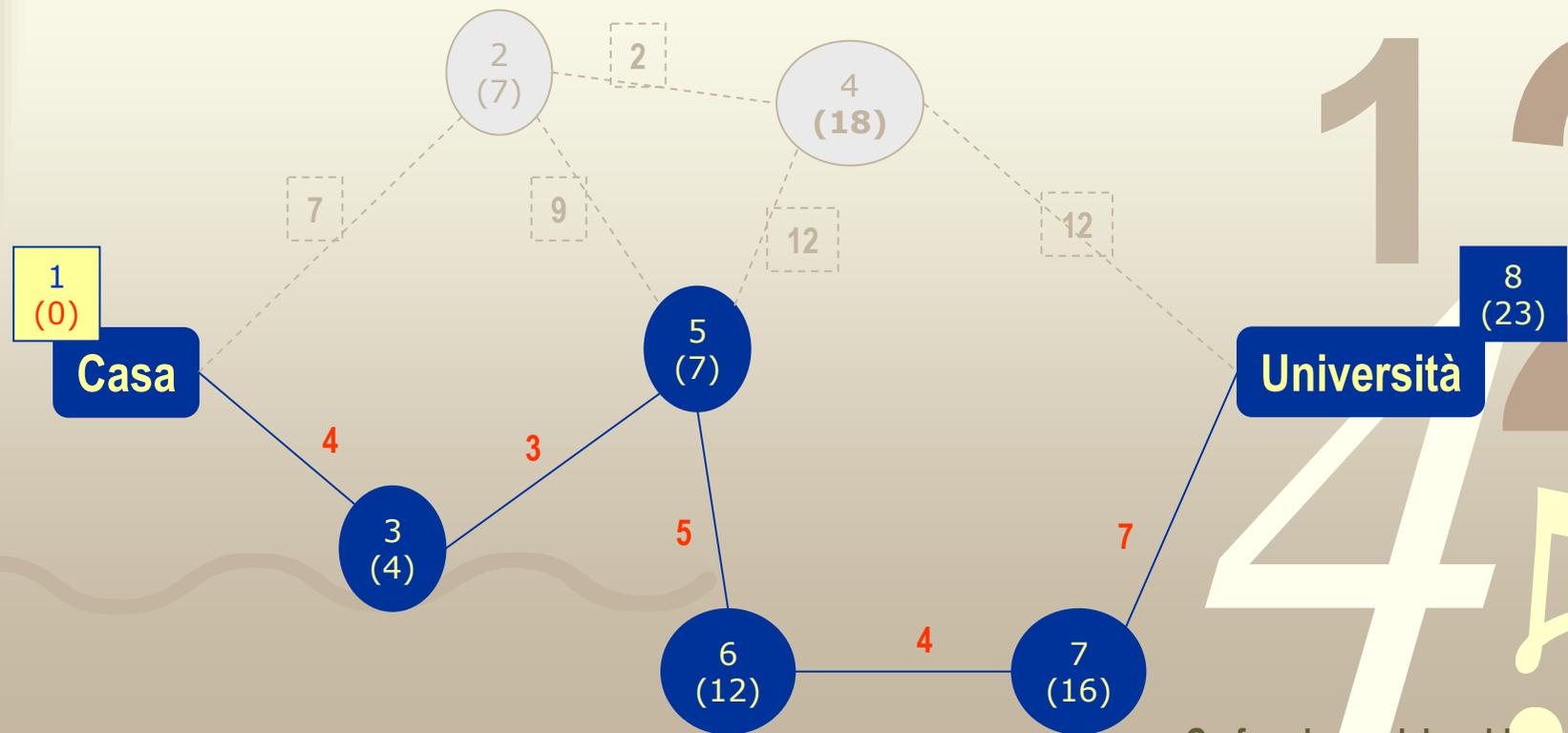
Grafo schema del problema

Teoria dei Grafi

Problemi di Cammino Minimo - Algoritmo di Dijkstra

0011

Descrizione dell'algoritmo in relazione al problema SP Casa-Università
Assegnazione di etichetta permanente e percorso definitivo



Teoria dei Grafi

Problema dei Quattro Colori

0011

Problema dei Quattro Colori

Qual è il numero minimo di colori strettamente necessari per colorare le regioni di una qualsiasi carta geografica in modo tale che due regioni adiacenti abbiano colori diversi.

Applicazione

- assegnazione di frequenze radio-televisive
- allocazione di variabili e registri in dispositivi elettronici

Congettura di Francis Guthrie

1852

Articolo di Arthur Cayley

1879

Pseudo dimostrazioni:
Alfred Kempe; Peter Tait

1879

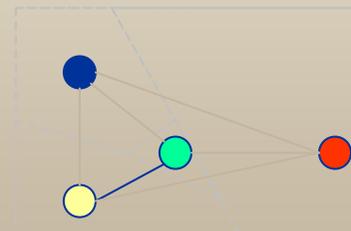
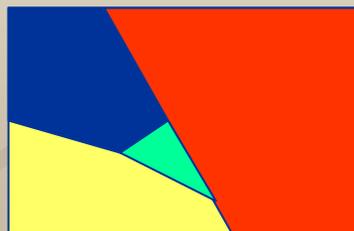
Dimostrazione definitiva
Kenneth Appel e Wolfgang Haken
(Università dell'Illinois)

1977

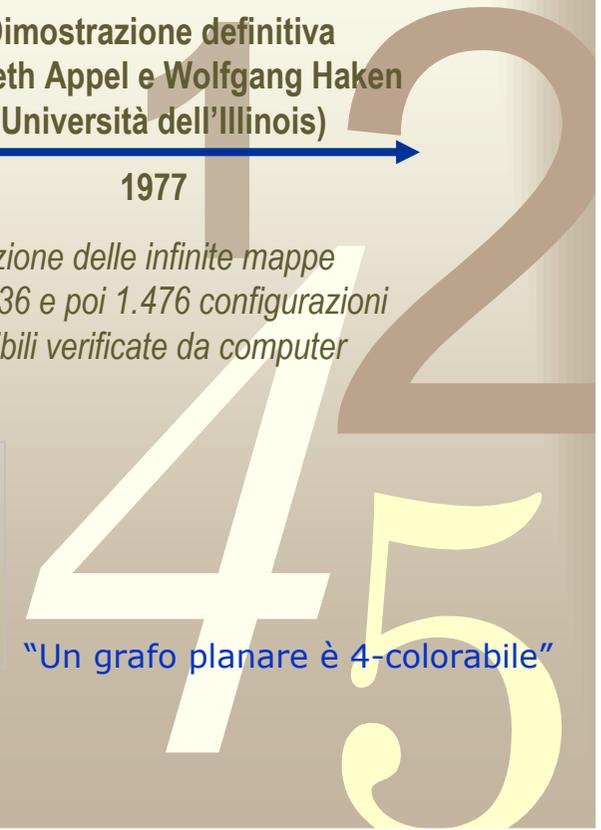
In termini di grafo:

“In ogni grafo planare è possibile colorare i nodi usando 4 colori senza che 2 nodi connessi abbiano lo stesso colore.”

*Riduzione delle infinite mappe
a 1.936 e poi 1.476 configurazioni
possibili verificate da computer*



“Un grafo planare è 4-colorabile”



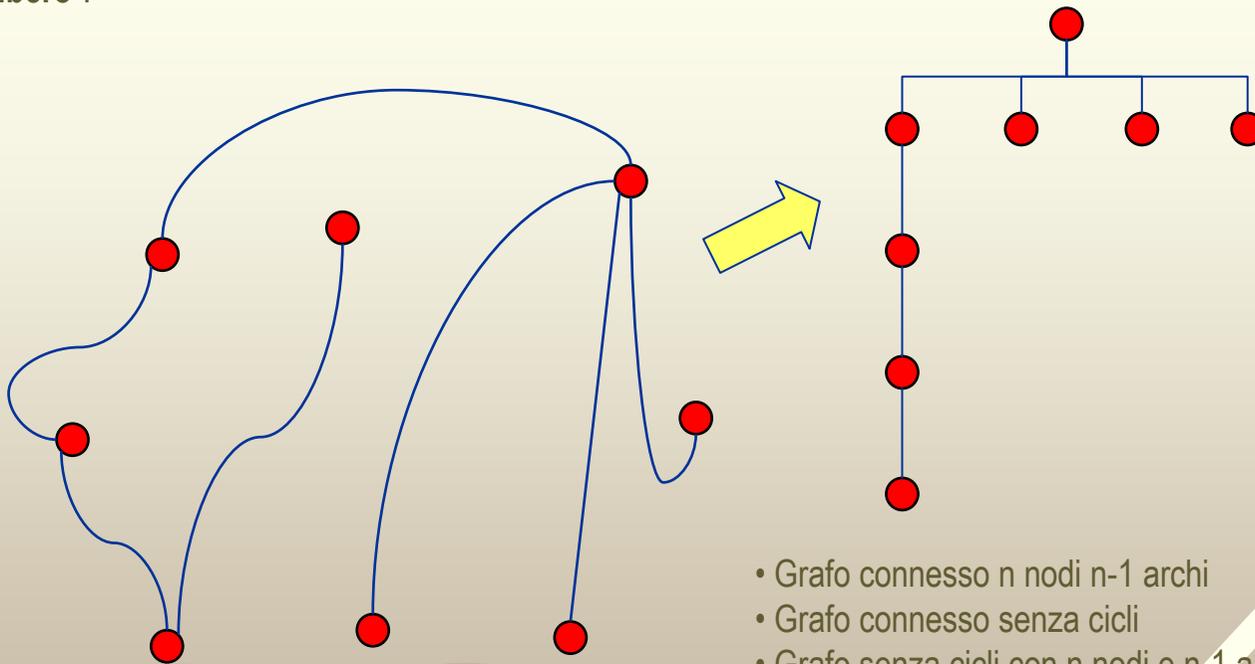
Teoria dei Grafi

Gli alberi

L'albero è un grafo connesso, non orientato e privo di cicli.

0011

Un grafo non orientato tale per cui presi due nodi qualsiasi esiste uno ed un solo cammino che li connette si definisca "albero".



- Grafo connesso n nodi $n-1$ archi
- Grafo connesso senza cicli
- Grafo senza cicli con n nodi e $n-1$ archi
- Grafo connesso che comunque si elimini un arco si ottiene un grafo non connesso

1
2
4
5

Teoria dei Grafi

Gli alberi - Alcune definizioni

0011

Livello 0

Livello 1

Livello 2

Livello 3

Livello 4

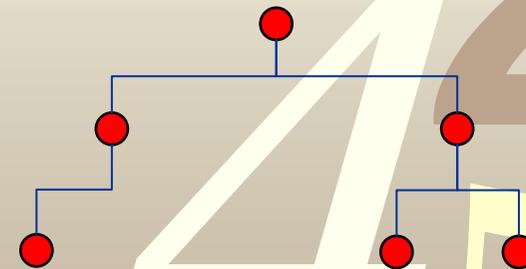
Nodo Radice

Un **albero** per cui si definisce un nodo radice è detto "radicato".

Livello di un nodo: distanza dalla radice

Altezza: massimo tra i livelli

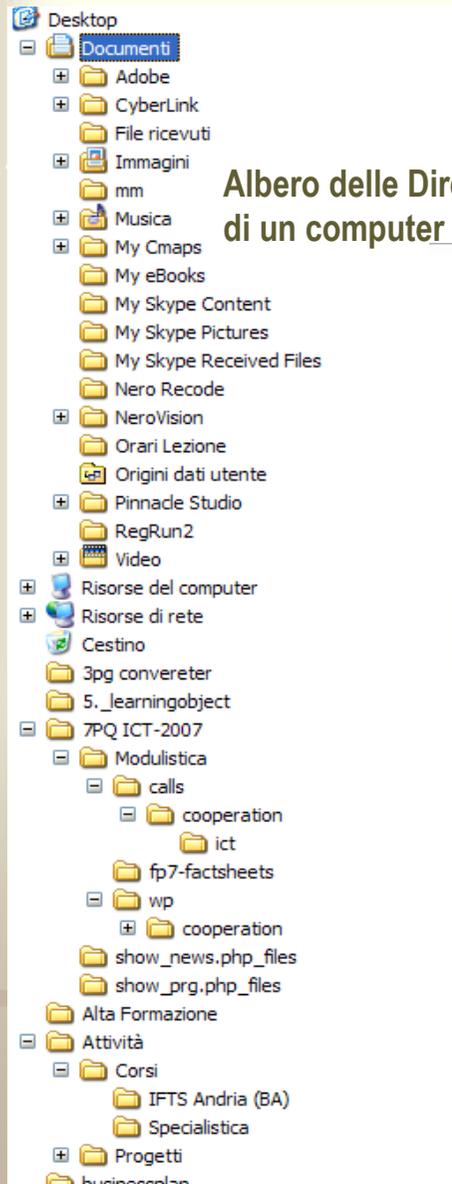
Un **albero binario** : albero con radice in cui ogni nodo ha al più due figli; ogni figlio è distinto come figlio sinistro oppure figlio destro.



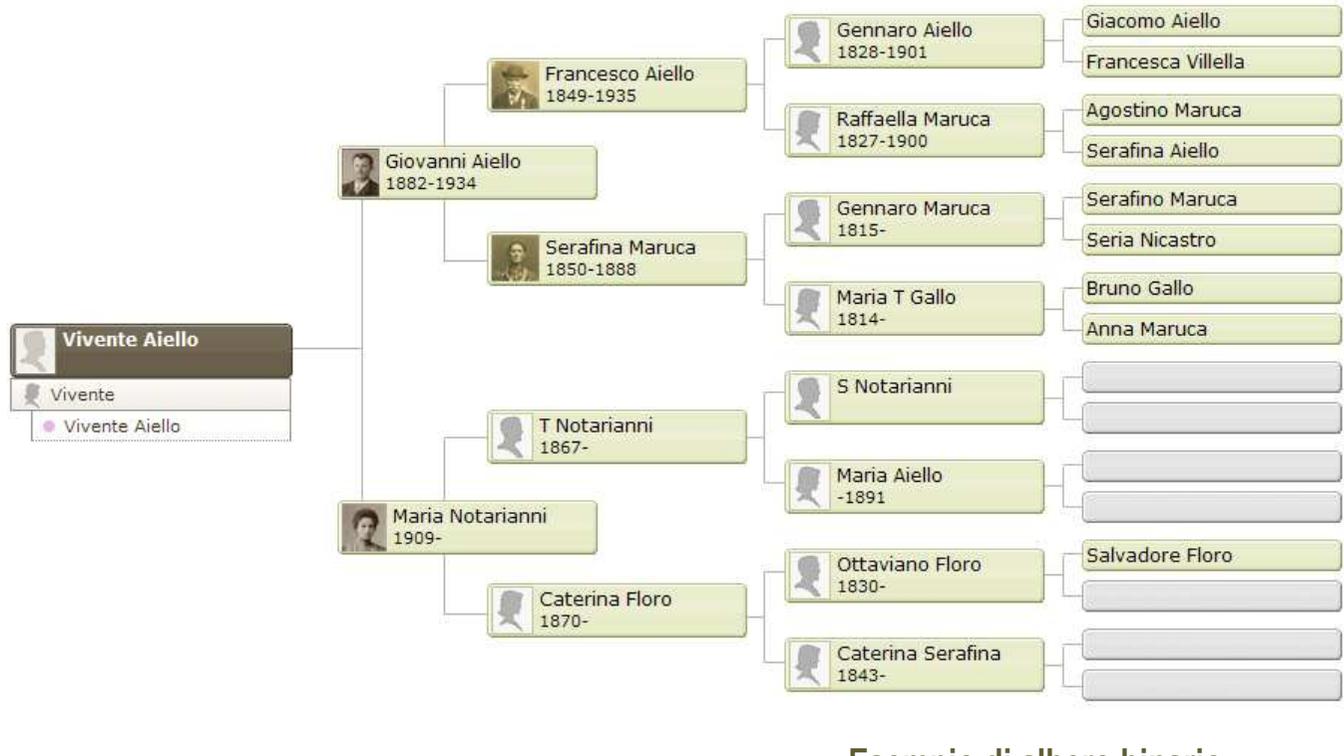
Teoria dei Grafi

Gli alberi – Esempi

00



Albero delle Directory di un computer



Esempio di albero binario



Teoria dei Grafi

Reti Casuali

0011

Un grafo in cui i link tra i nodi siano disposti secondo una distribuzione **gaussiana**, od altra distribuzione casuale, intorno ad un valore medio è detto grafo casuale o **rete casuale**.

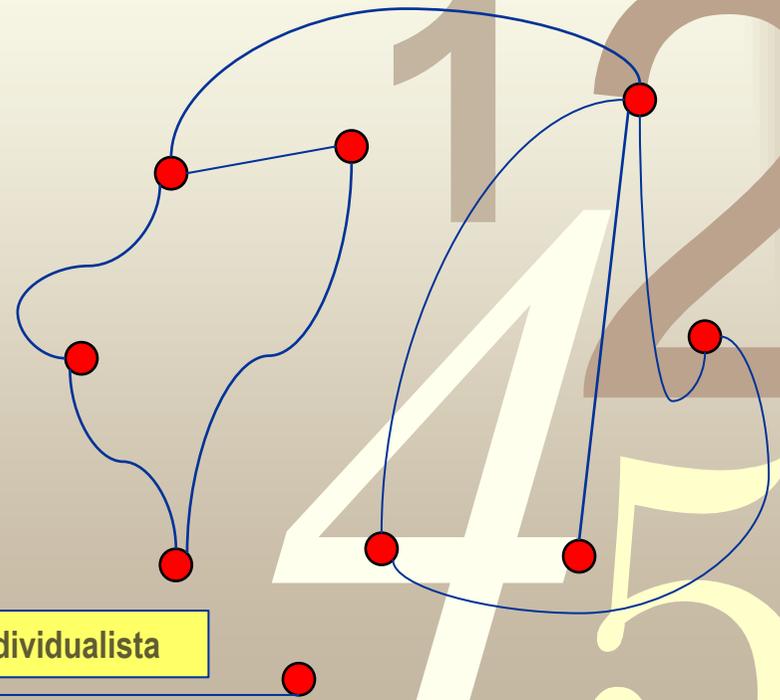
Paul Erdős e Alfréd Renyi (1959)

six degrees of separation (sei gradi di separazione)
distanza media tra due individui qualsiasi in una rete sociale

Il social network

Gruppi di persone
connesse attraverso
legami sociali

Individualista



Teoria dei Grafi

Reti a Invarianza di Scala (Scale Free Network)

0011

Un grafo che gode della proprietà che se si considera la relazione tra il numero di nodi ed il numero delle loro connessioni si vede che il suo grafico è di tipo esponenziale negativo, e quindi invariante per cambiamenti di scala si dice essere una **Rete a invarianza di scala** (in inglese è scale-free network)

Albert-László Barabási (1988)

Definisce la "legge di potenza" di cui a è parametro

La rete sociale

Internet (collegamenti tra router)

WWW (collegamenti tra pagine)

Teoria dei piccoli mondi (branca della teoria dei grafi): teoria generalizza ed esplora le caratteristiche di insieme che hanno reti connesse di elementi, indipendentemente dalle caratteristiche proprie degli elementi.

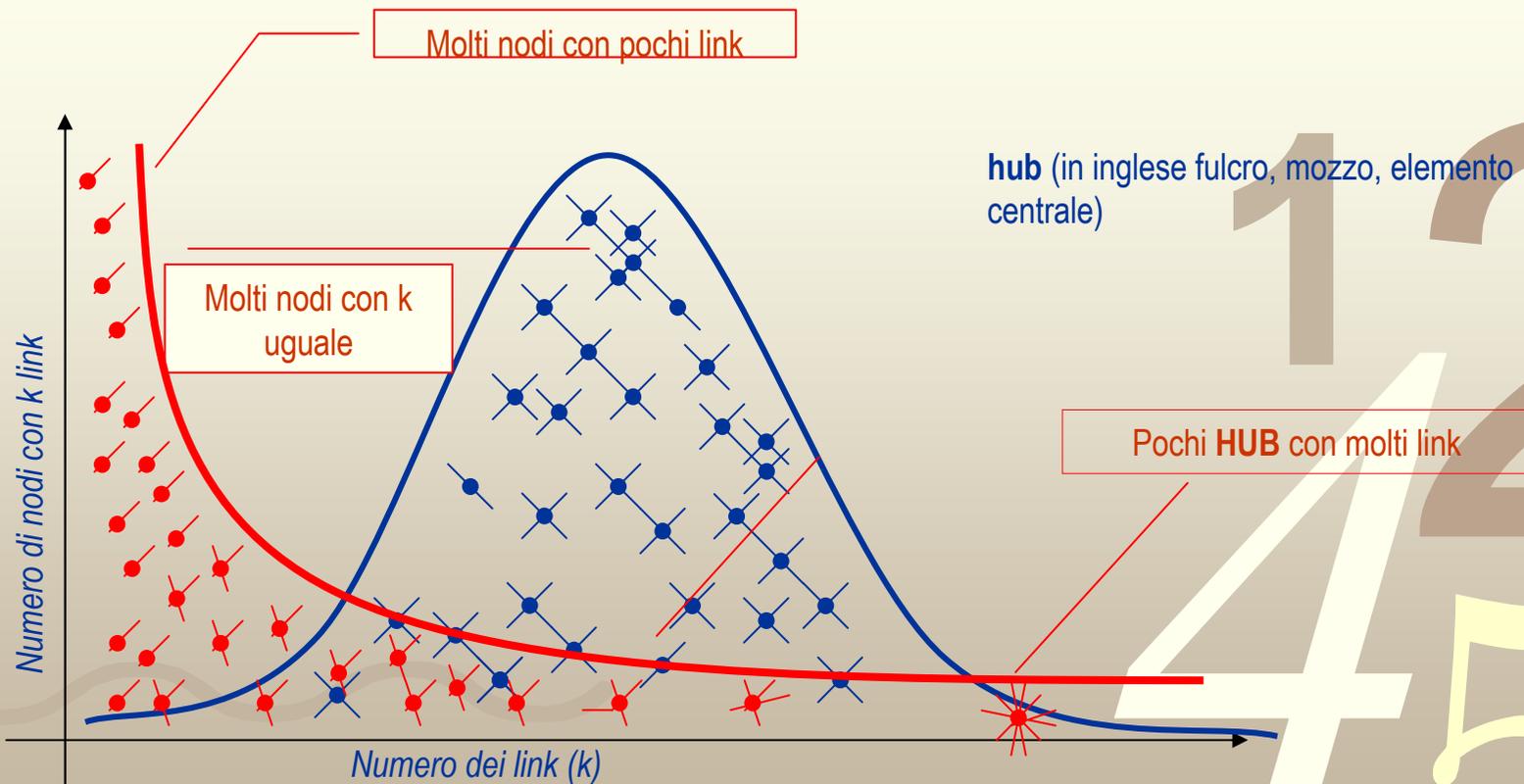
("Collective dynamics of «smallworld» networks" articolo su Nature di due matematici Duncan Watts e Steve Strogatz (1998).

Teoria dei Grafi

Reti a Invarianza di Scala (Scale Free Network)

0011

Da curve a campana (Gauss) verso reti regolate da **leggi di potenza**



Teoria dei Grafi

Scale Free Network e Pensieri...

06/11

Le reti sono una analisi matura del mondo reale e della possibilità di rappresentarlo

Dal **riduzionismo** come analisi "*infantile*" alla capacità di rimontare il giocattolo

I mondi reali sono anche i mondi della struttura della conoscenza: conoscere gli elementi non vuol dire comprendere il significato del tutto

Il concetto di HUB e reti resistenti ad attacchi "scoordinati" deboli ad attacchi strutturati

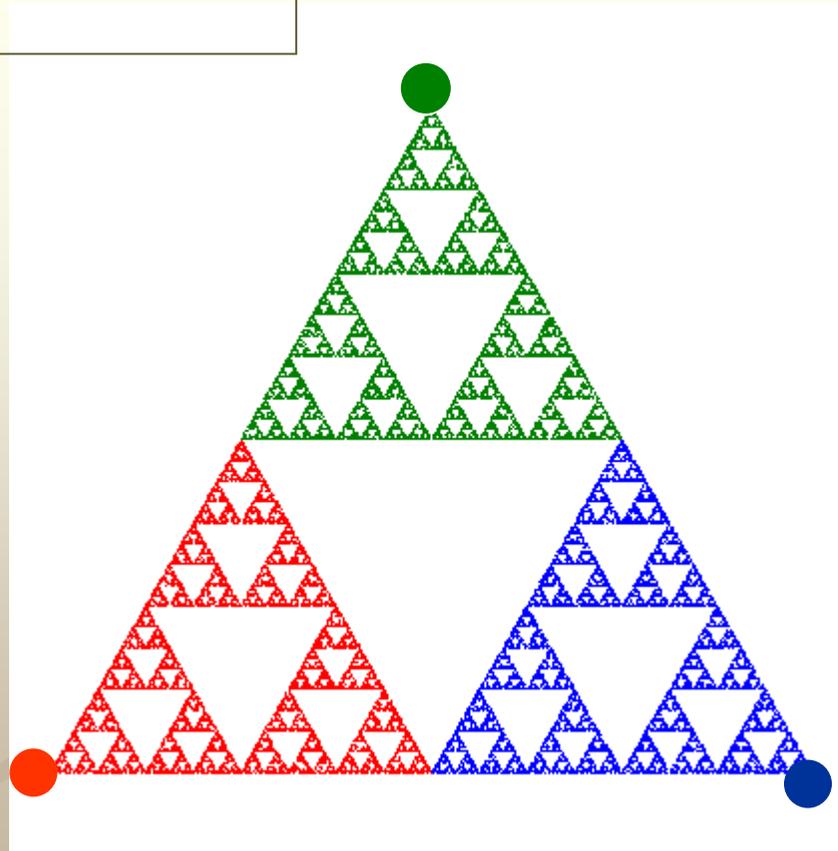
Teoria dei Grafi

Un'ultima riflessione

0011

“Il caso è la somma delle nostre ignoranze.”

Pierre Laplace



Sierpinski Triangle
(Frattale)



Teoria dei Grafi

Grafi e Reti

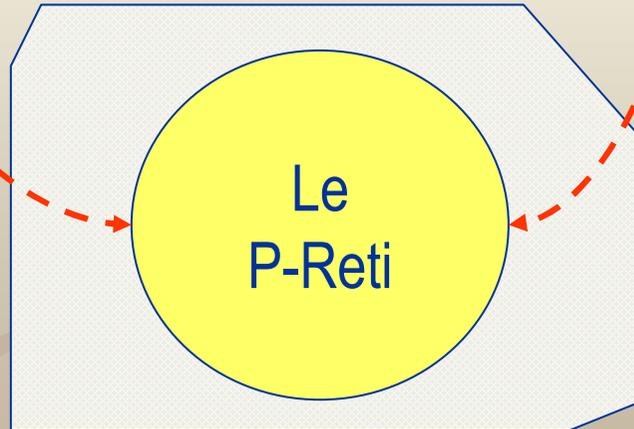
0011



Rappresentazione



Carl Adam Petri (1962)



Le Reti di Petri (P-reti)
Schema riassuntivo

0011

