

# LABORATORIO DI INFORMATICA

0011

"Ogni problema che ho risolto è diventato una regola  
che in seguito è servita a risolvere altri problemi."  
(René Descartes, *Cartesio "Discorso sul metodo"*)

**Giorgio Poletti**

[giorgio.poletti@unife.it](mailto:giorgio.poletti@unife.it) – <http://docente.unife.it/giorgio.poletti>



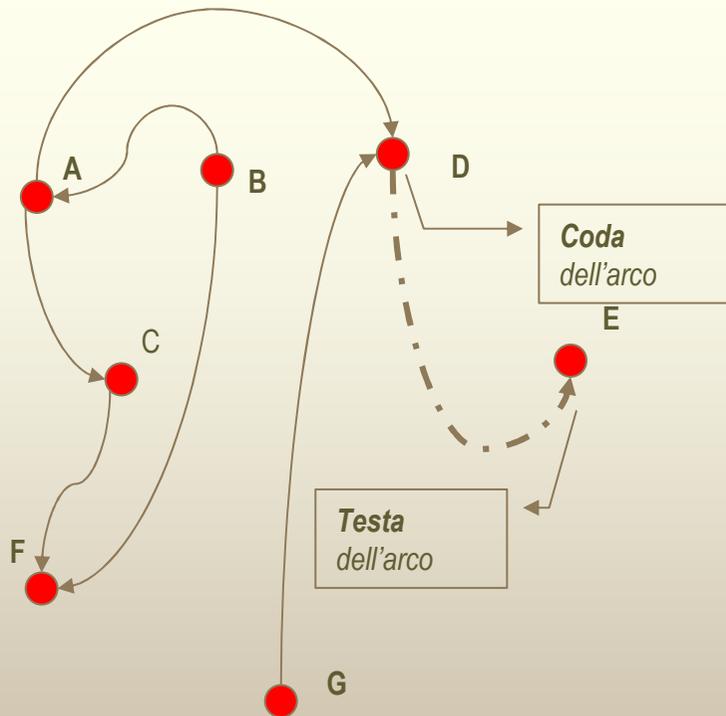
# Teoria dei Grafi

## Tipi fondamentali

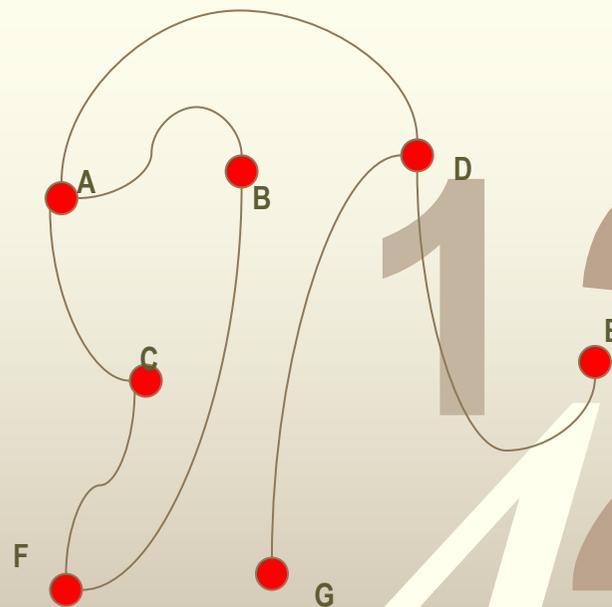
Notazione di Grafo:  $G(N,A)$  con  $N$  insieme dei nodi e  $A$  insieme degli archi che li connettono

0011

Ogni arco ha una direzione



Grafo **orientato** (o *digrafo*, grafo diretto)



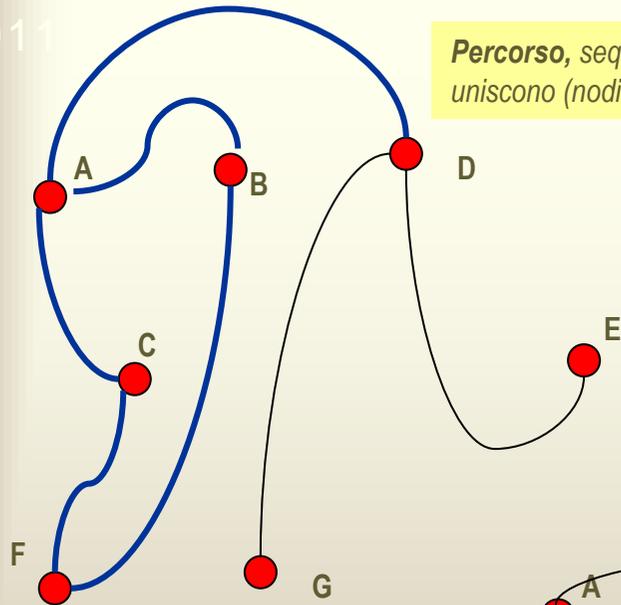
Grafo **semplice** (nessun arco orientato)

# Teoria dei Grafi

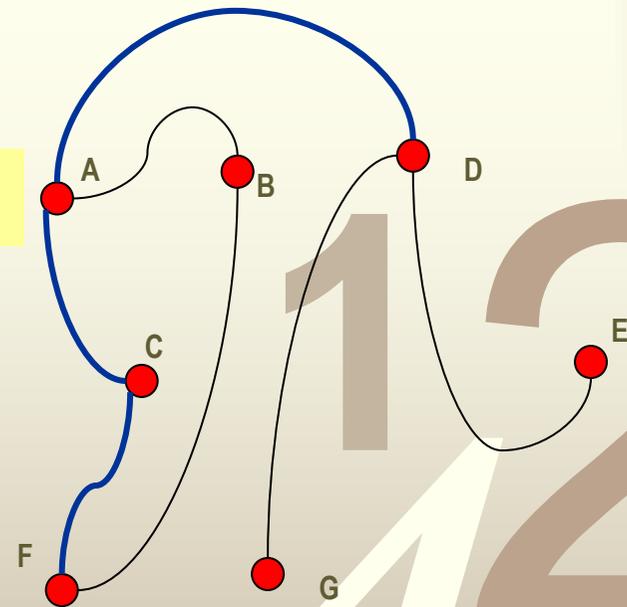
## Percorso, Cammino e Ciclo

0011

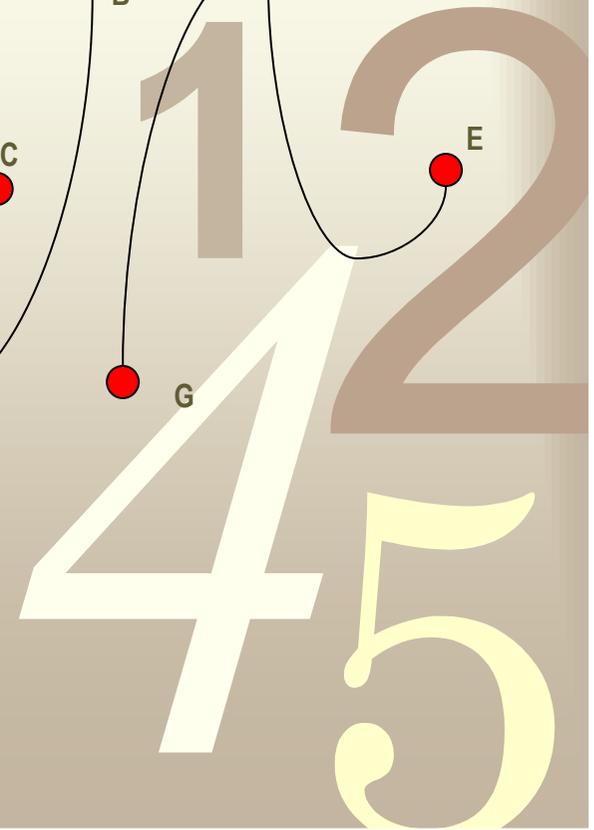
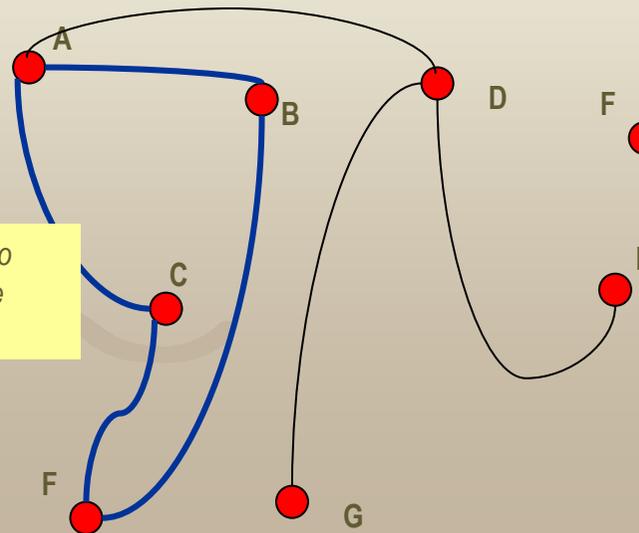
**Percorso**, sequenza di  $n$  nodi e  $m$  archi che li uniscono (nodi anche non distinti), lunghezza  $N$



**Cammino**, percorso con nodi distinti



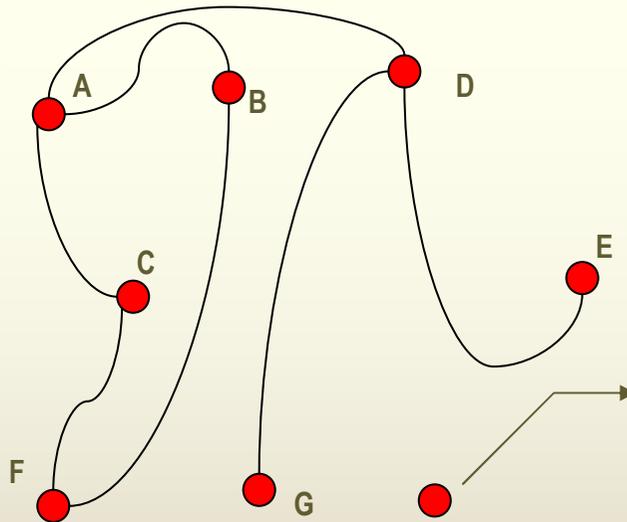
**Ciclo (o circuito)**, cammino chiuso, coincidono il primo e l'ultimo nodo



# Teoria dei Grafi

## La connessione

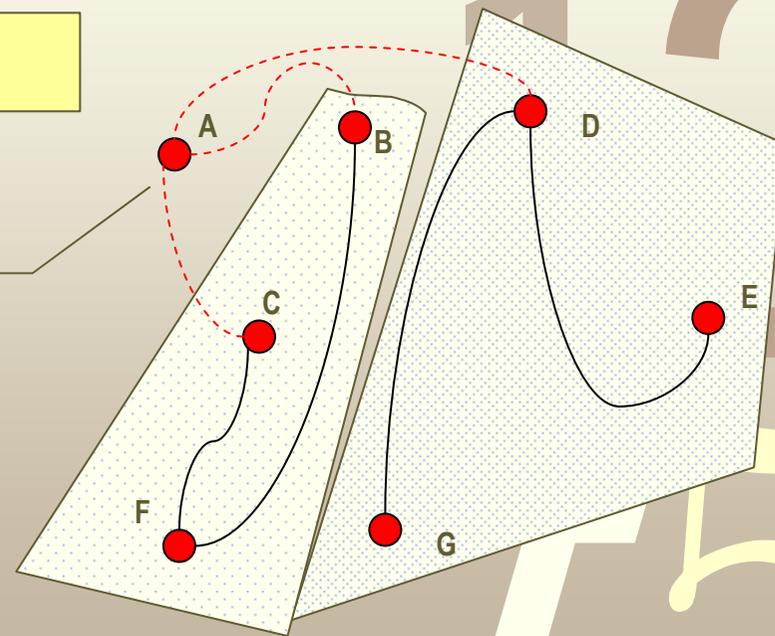
0011



Un Grafo si dice **connesso** se esiste un cammino tra ogni sua coppia di nodi

Nodo isolato  
(grado 0)

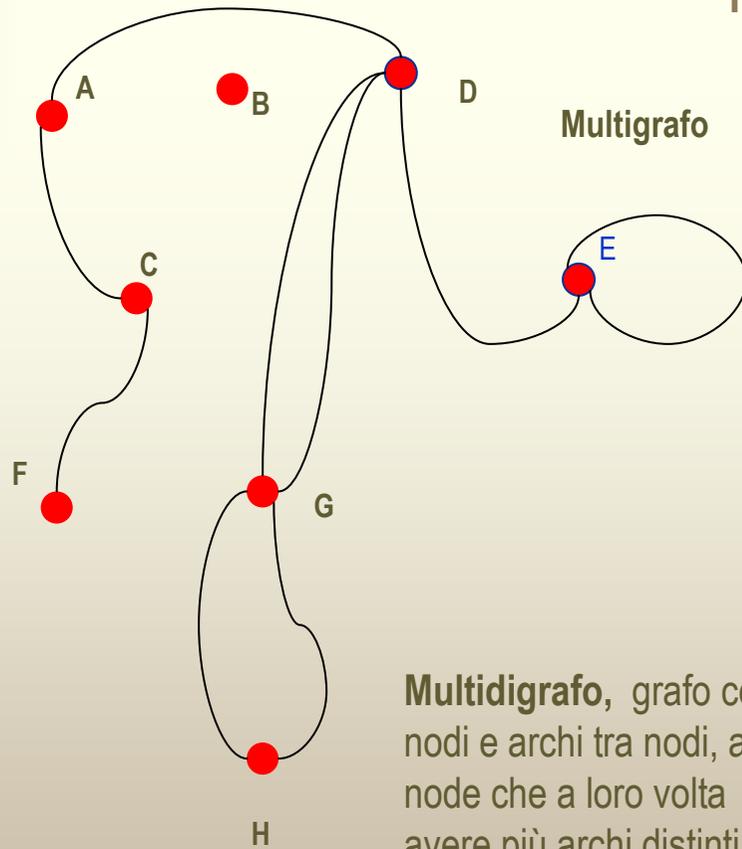
**Snodo o Ponte** (eliminato  
rende il grafo non connesso)



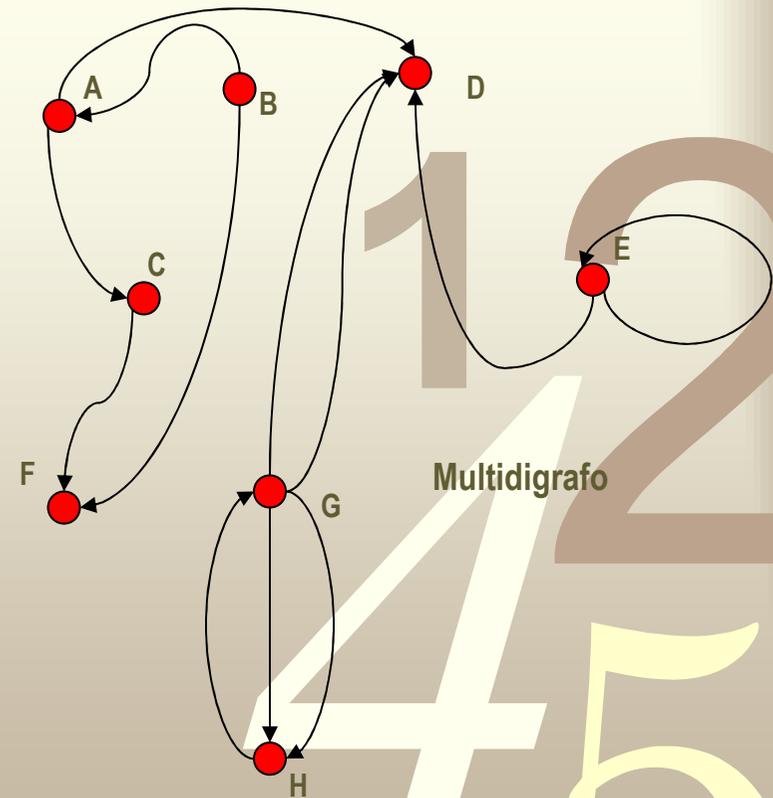
# Teoria dei Grafi

## Tipi di Grafi

0011



Multigrafo



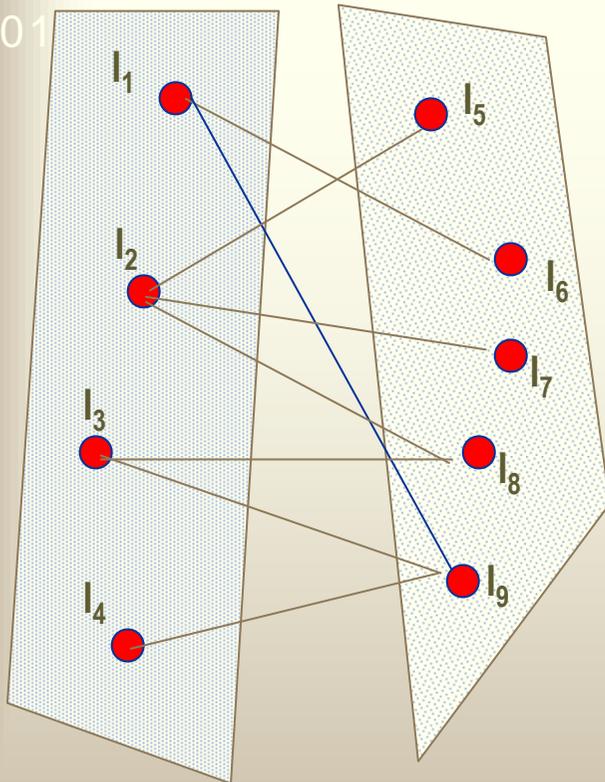
Multidigrafo

**Multidigrafo**, grafo costituito da nodi e archi tra nodi, archi tra due node che a loro volta possono avere più archi distinti, e un nodo può possedere più cappi. Se gli archi sono orientati si parla di **multidigrafi**.

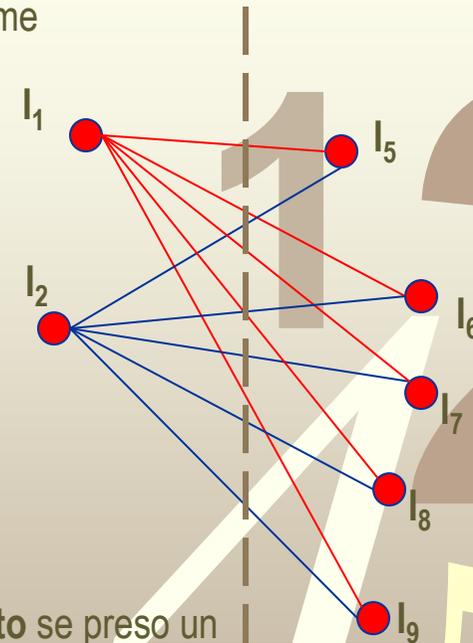
# Teoria dei Grafi

## Tipi di Grafi

001



**Grafo Bibartito**, grafo non orientato tale per cui è possibile dividere l'insieme dei nodi che lo compongono in due insiemi separati e tali per cui il nodo di un insieme è connesso solo a nodi dell'altro insieme

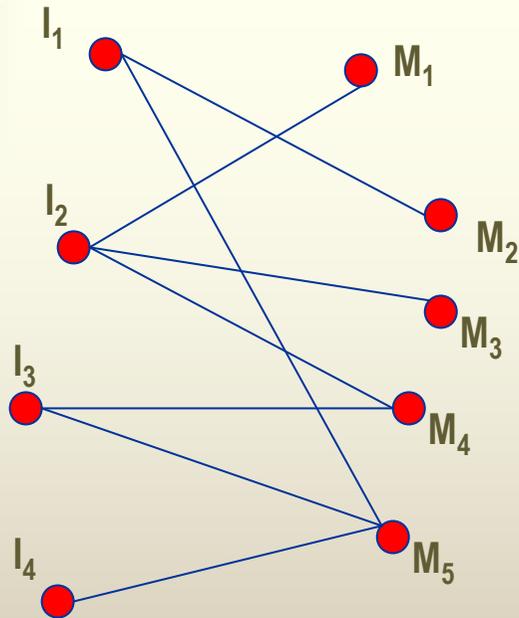


**Grafo Bibartito Completo** se preso un nodo nel primo insieme e uno nel secondo c'è un arco che li unisce

# Teoria dei Grafi

## Grafi bipartiti come modelli di problemi

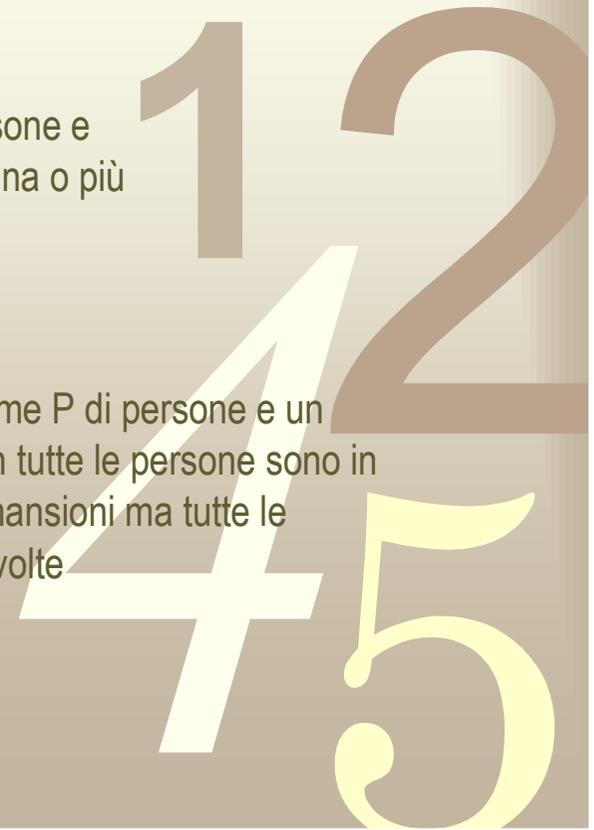
0011



**Grafo Bibartito**, schematizza problemi di accoppiamento o **matching**

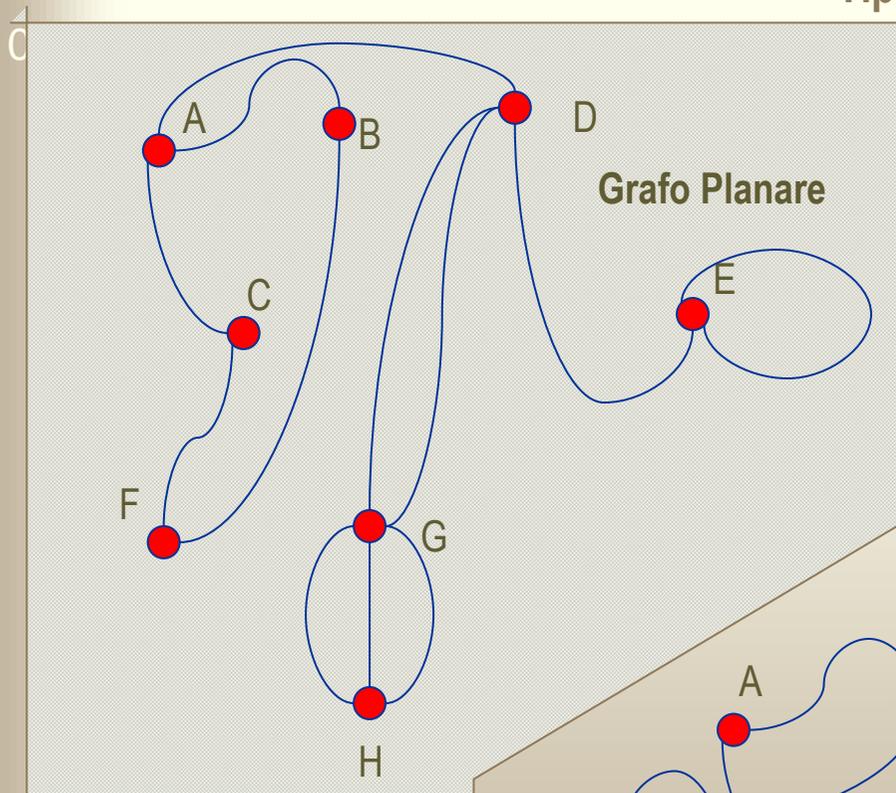
Classicamente un problema di persone e mansioni, necessità di assegnare una o più mansioni a una o più persone

Equivale ad avere un insieme  $P$  di persone e un insieme  $M$  di mansioni, non tutte le persone sono in grado di svolgere tutte le mansioni ma tutte le mansioni devono essere svolte



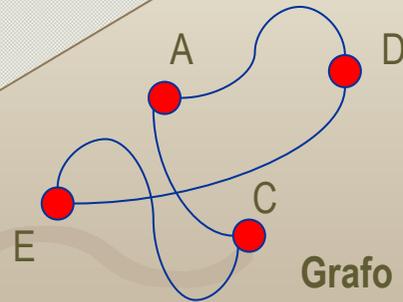
# Teoria dei Grafi

## Tipi di Grafi

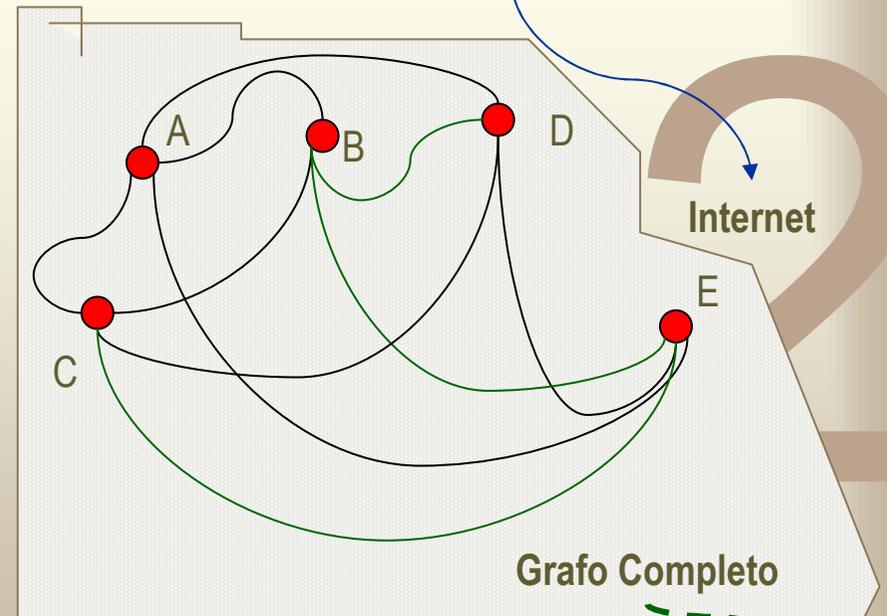


Grafo Planare

Un **Grafo** si dice **planare**, quando si può disegnare su un piano senza che gli archi si intersechino



Grafo Non Planare



Grafo Completo

Grafo Completo con  $N$  nodi è regolare di grado  $N-1$

Un **Grafo** si dice **completo** se è semplice, e presa una qualsiasi coppia di nodi esiste un arco che li unisce.

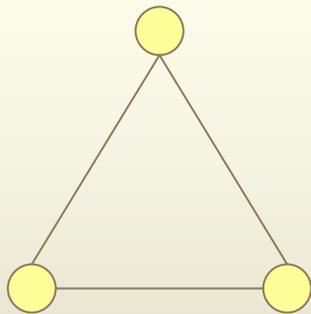
Internet

# Teoria dei Grafi

Esempi di grafo completo e regolare e bipartito completo e regolare

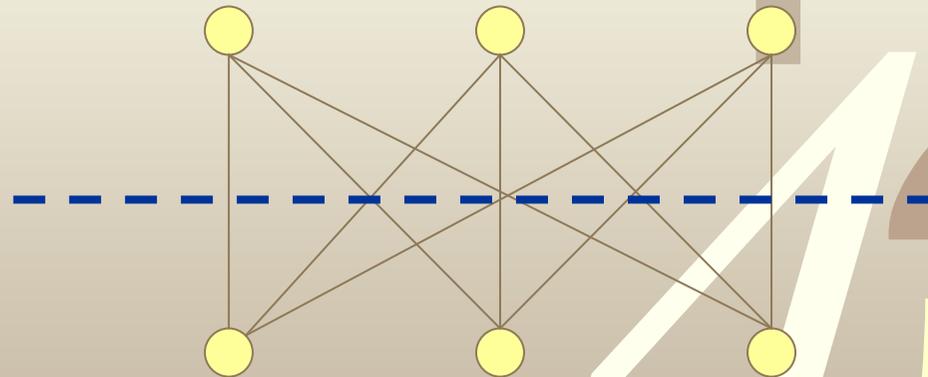
0011

Il grafo completo,  $K_n$ , è un grafo regolare di grado  $n-1$



**Grafo Completo** con 3 nodi e **regolare** di grado 2 (2 archi incidenti su ogni nodo).

$K_3$



**Grafo Bipartito e Completo** con 3+3 nodi.

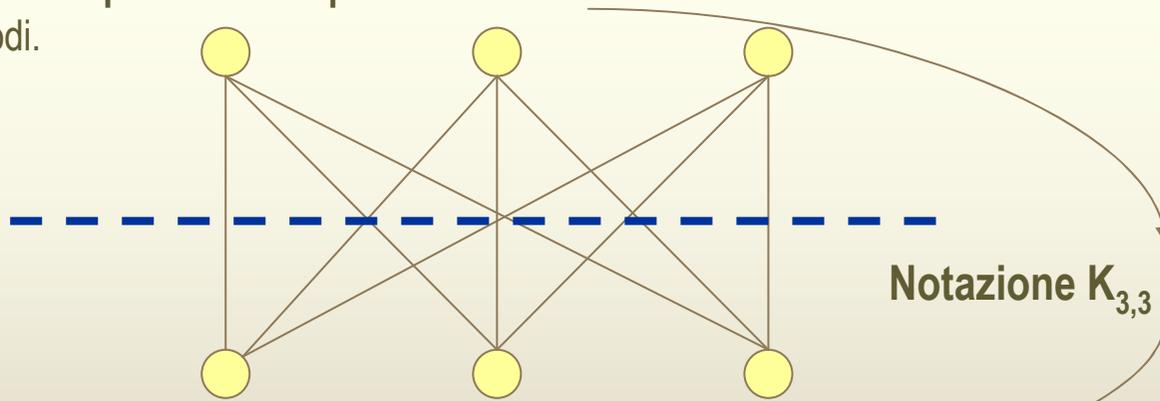
1  
2  
4  
5

# Teoria dei Grafi

Esempi di grafo bipartito completo e regolare

0011

**Grafo Bipartito e Completo con 3+3  
nodi.**



**Grafi di Kuratowski**

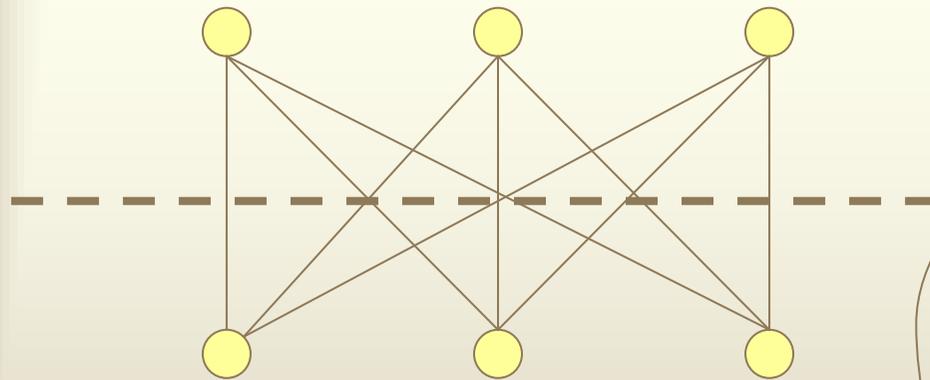
*Kazimierz Kuratowski, matematico polacco*

1 2  
4 5

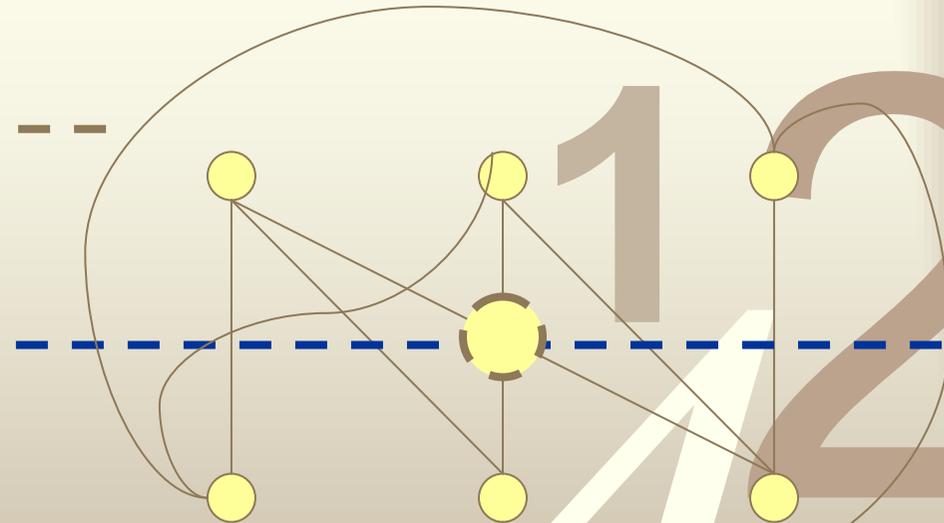
# Teoria dei Grafi

## Problema "le tre case e le tre forniture"

001 *Si possono collegare tre case a tre fornitori senza che strade, tubature o cavi che le connettono si incrocino? Qual è il numero minimo di incroci che si devono fare ?*

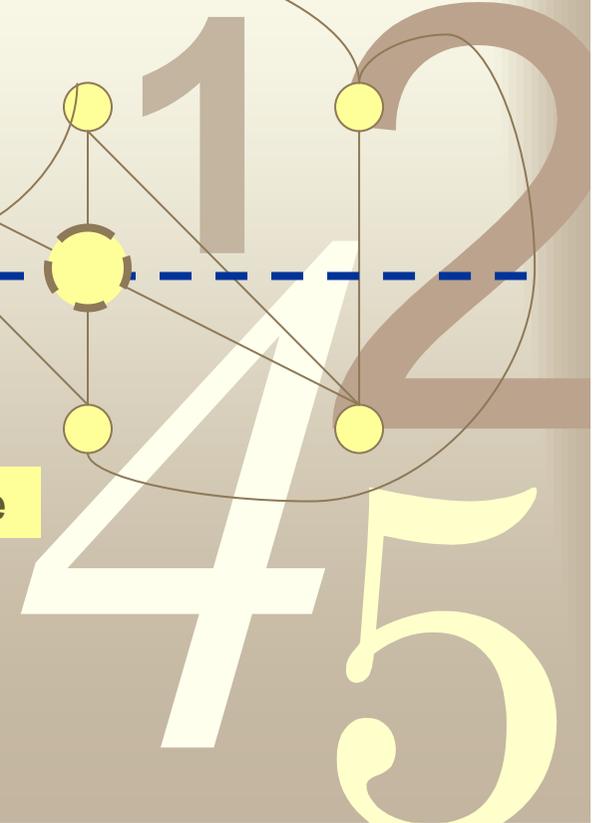


Schema del problema



Schema di possibile soluzione

Il Teorema di **Kuratowski** ci permette di dichiarare l'impossibilità di generare 0 incroci e indicare 1 è il numero minimo di essi.



# Teoria dei Grafi

Grafi e proto-problemi

0011

Il problema dei ***ponti di Königsberg***

Il problema del ***commesso viaggiatore***

Il problema delle **tre case e delle tre forniture**

Il problema dei **quattro colori**



# Teoria dei Grafi

## Problema del Commesso Viaggiatore

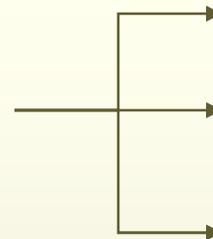
0011

### Problema del Commesso Viaggiatore



*TSP (Traveling Salesman Problem)*

problema di



Teoria dei Grafi

Informatica

Teoria della  
Complessità

Data una rete di città, connesse tramite strade, trovare il percorso di minore distanza che un commesso viaggiatore deve seguire per visitare tutte le città una e una sola volta.

*Studio della complessità descrittiva degli algoritmi in maniera indipendente dalla risorse computazionali che richiedono per essere eseguiti.*

In termini topologici o di grafo

Dato un grafo completo, pesato, trovare il ciclo **hamiltoniano** più economico (con peso minore)

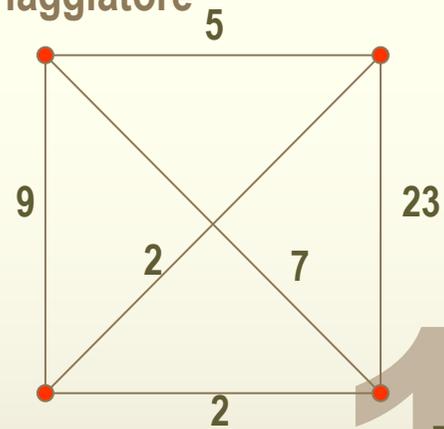
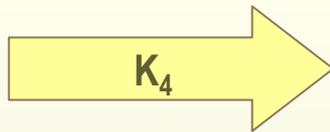
Problemi logistici, robotica ed elettronica.....

# Teoria dei Grafi

## Problema del Commesso Viaggiatore <sup>5</sup>

0011

Grafo completo  
con  $n$  nodi  $K_n$



Pesato

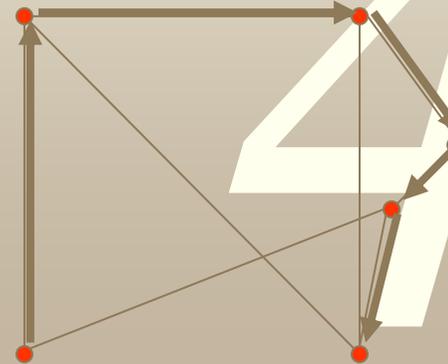
Cammino  
hamiltoniano

Cammino, in un grafo semplice che passa  
(*visita*) una ed una sola volta ogni nodo.

Se primo e ultimo nodo  
coincidono

Ciclo hamiltoniano

Cammino  
hamiltoniano

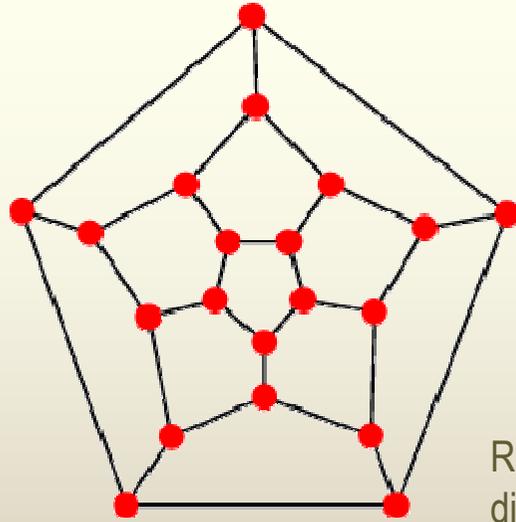


# Teoria dei Grafi

## Problema del Commesso Viaggiatore

0011

William Rowan Hamilton, scienziato irlandese, inventò il gioco da tavola detto **puzzle di hamilton** (o **icosian game**)



Scopo dell'**icosian game**: trovare un cammino hamiltoniano tra i vertici di un dodecaedro.

Rappresentazione su un piano di un **dodecaedro**

Il teorema di **Dirac** definisce una condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un grafo con  $n$  vertici sia **hamiltoniano**: il grado di ogni vertice (cioè il numero di spigoli adiacenti) deve essere maggiore o uguale a  $n / 2$ .

1 2  
4 5

# Teoria dei Grafi

## Problemi di Cammino Minimo (SP - Shortest Path)

Dato un grafo pesato qual è il cammino che unisce 2 nodi (vertici) dati che è minimo rispetto al valore della somma dei costi (pesi) associati a ciascun arco?

algoritmo di tracciamento (di rotta)

o

**"pathing algorithm"**

Una soluzione del problema si dice

Nel campo delle telecomunicazioni, a volte viene detto **min-delay path problem**.

Gioco dei **6 gradi di separazione** introdotto dallo scrittore ungherese Frigyes Karinthy in *Catene*, un racconto breve del 1929.

Un algoritmo possibile per la soluzione:

**Algoritmo di Dijkstra**

(per cammini con una sola sorgente e valori 0 o positivi degli archi)

Esempio: "Query solver" di shortest path sulla Wikipedia inglese

