TEORIA DEI GRAFI
INTRODUZIONE ALLA PROBLEMATICA

"La mente umana deve prima costruire delle forme in maniera indipendente, prima di ritrovarle nelle cose."
Albert Einstein

PREMESSA

Un **grafo** è una struttura relazionale composta da un insieme finito di oggetti (sul piano più strettamente matematico un insieme finito di punti) detti **"nodi"** (*o* ***vertici***) e da un insieme di relazioni (geometricamente segmenti di retta o di curva) tra coppie di oggetti detti **"archi"** (*o* ***spigoli***).
Per quanto riguarda le notazioni, utilizzeremo la seguente:

G(N,A)

dove **N** indica l'insieme dei nodi e **A** indica l'insieme degli archi che compongono il grafo **G**.
L'importanza che assume questa struttura è da attribuire alla constatazione che più di una situazione *"reale"* può essere schematizzata utilizzando i grafi, da una rete stradale (dove i nodi sono gli incroci e gli archi le strade) ad un programma di calcolo (dove i nodi rappresentano le istruzioni ed esiste un arco tra due nodi se le relative istruzioni possono essere eseguite in successione) oppure una struttura dati (dove i nodi rappresentano i dati e gli archi i legami tra i dati, realizzabili tramite puntatori o formalizzabili attraverso realzioni semanticamente definite[1]).
L'origine storica della teoria è generalmente fatta risalire ad un lavoro sviluppato da Eulero[2] nel 1736 in cui veniva data una risposta ad un famoso quesito matematico noto come **"*problema dei ponti di Königsberg*"**[3].
Königsberg era una ricca e popolosa città della Prussia (*oggi si chiama Kaliningrad ed è in Russia, capitale dell'Oblast di Kalinigrad, un territorio situato tra Polonia e Lituania*), che si estendeva sulle rive e sul due isole formate del fiume Pregel (*in russo Pregolja*), in quell'area geografica (*come è mostrato in Figura 1*), che nel 1700 era attraversata da sette ponti.

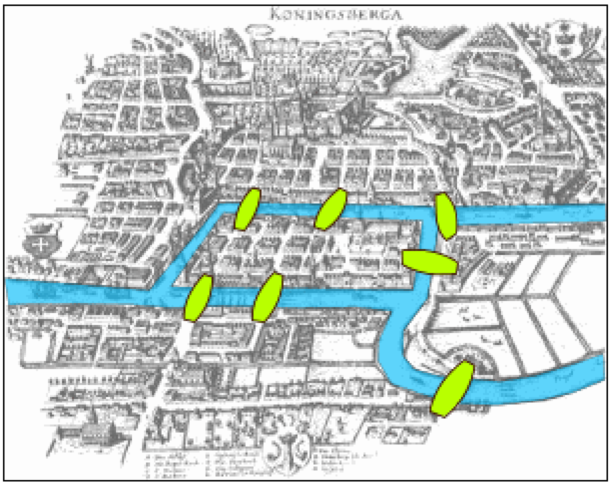


Figura 1 - Mappa di Königsberg ai tempi di Eulero, in evidenza la disposizione dei ponti sul fiume Pregel e della città (immagine tratta da *Wikipedia – L'enciclopedia libera*).

I ponti della città erano disposti in modo tale che la prima isola (*indicata convenzionalmente A*) era collegata con due ponti a ciascuna delle due rive (*indicate rispettivamente in maniera convenzionale C e D*), mentre la seconda isola

[1] Relazioni di cui è noto non solo i termini della relazione stessa, ma anche il significato che tale relazione esplicita.

[2] Eulero è considerato il matematico che più di ogni altro ha caratterizzato il movimento culturale dell'illuminismo. Il suo nome è Leonhard Euler, nato a Basilea, 15 aprile 1707 e morto a San Pietroburgo, 18 settembre 1783. Allievo di Johann Bernulli e autore di un grande numero di scritti e trattati.

[3] Il *problema dei ponti di Königsberg* viene definito e risolto da Eulero in un suo scritto del *1734 "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*", che viene per questo considerato il primo trattato scientifico sulla teoria dei grafi.

(*indicata convenzionalmente B*) era collegata con un solo ponte a ciascuna riva ed inoltre vi era un ponte che collegava A e B, generando uni schema che è quello mostrato in Figura 2.
Ora il problema che veniva posto era il seguente: ”*come in ogni cittadina tedesca, era uso anche a Königsberg che alla domenica gli abitanti facessero la loro passeggiata per le vie della città; era possibili progettare un percorso che permettesse a ciascuno di partire da casa e tornarvi dopo aver attraversato ciascun ponte una ed una sola volta?*”

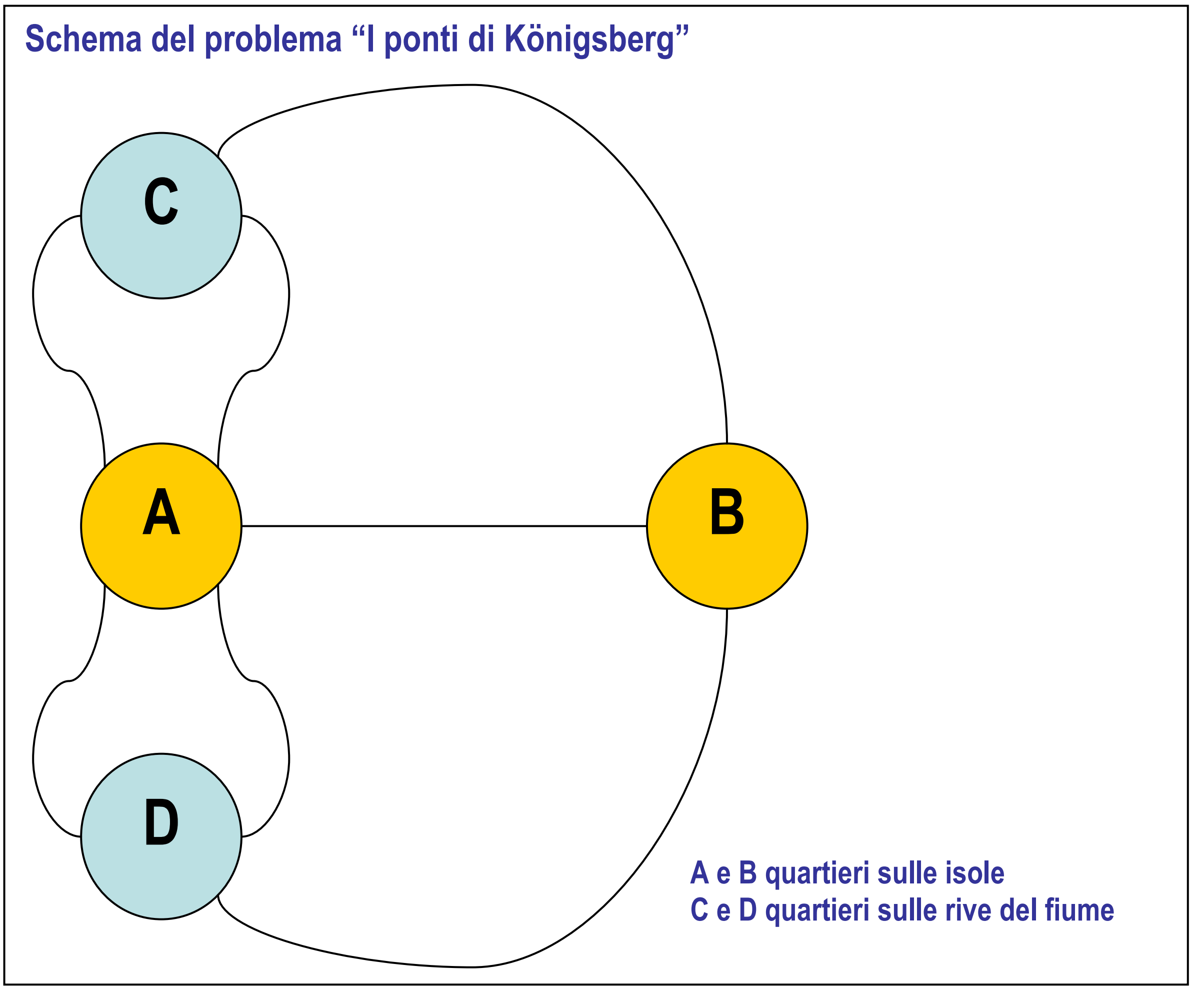


Figura 2 - Rappresentazione del problema attraverso l'astrazione con enti geometrici della mappa reale della città, e della disposizione dei ponti.

Eulero, come nello schema proposto, per dimostrare che il problema non aveva soluzioni sostituì ogni riva del fiume e ogni isola con un nodo ed ogni ponte con un arco; in tal modo trasformò il processo della soluzione del problema nell'analisi e nello studio topologico[4] del grafo così costruito. Attraverso questo procedimento Eulero ha prima analizzato le diverse configurazioni possibili osservando che il problema aveva soluzione nei casi in cui ogni nodo ha grado pari (è cioè pari il numero di archi che incidono su di esso) e non ammetteva soluzioni nel caso in cui almeno un nodo avesse grado dispari. In virtù di queste considerazioni Eulero enunciò il suo teorema che assume così una valenza generale.

Teorema di Eulero: "*condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo sia percorribile completamente partendo da un nodo e ritornandovi passando una volta solamente per ciascun arco é che esista un percorso fra ogni coppia di nodi e che ogni nodo sia toccato da un numero pari di archi.*"

[4] La topologia o studio dei luoghi , dal greco ***τοπος*** (topos-luogo), e ***λογος*** (logos-studio) è la branca della matematica che si occupa dello studio delle proprietà delle figure e delle forme; in particolare si occuopa dello studio dell'invarianza di tali proprietà quando le figure e le forme vengono deformate senza "strappi", "sovrapposizioni" o "incollature". Il teorema dei Ponti di Königsberg e il relativo artico di Eulero è considerato uno dei primi esempi topologici, poiché il risultato non dipende da alcun tipo di misurazione.

Eulero ha quindi dimostrato che un tipo di cammino con le caratteristiche descritte nel problema dei ponti Königsberg è possibile se e solo se il grafo non ha nodi di grado dispari. Un cammino con le caratteristiche enunciate nel problema è detto ***ciclo euleriano***; si parla invece di ***cammino euleriano*** nel caso in cui non si richieda che il punto di inizio e di fine coincidano e in quel caso si possono avere o nessuno o due nodi di grado dispari. Un grafo che ammette almeno un ciclo euleriano è detto un ***grafo euleriano***.

Nella prima meta dell'ottocento, poi, Kirchhoff[5] e Cayley[6] svilupparono importanti applicazioni di tale teoria, il primo per quanto concerne lo studio delle reti elettriche, il secondo nell'ambito degli isomeri chimici.
In sintesi la "*teoria dei grafici*" di Cayley permette il calcolo del numero degli isomeri possibili quando si tratta di isomeri strutturali, mentre Kirchhoff dopo studi ed esperimenti empirici enunciò le leggi che portano il suo nome (**leggi di Kirchhoff**) che permettono di sostituire completamente, nei circuiti a parametri concentrati[7], le leggi dell'elettromagnetismo riducendole essenzialmente in un insieme di pure relazione topologiche, cioè lo studio delle proprietà di figure e forme.
L'informatica, infine, pone particolare interesse a tale teoria; tale interesse é evidente se si pensa ai grafi come strumenti indispensabili per la progettazione e la rappresentazione efficiente di reti di computer, le strutture di data base e moltissime altre strutture fisiche e logiche, come le importantissime mappe concettuali[8] e la relativa rappresentazione della conoscenza.

DEFINIZIONI

Diviene fondamentale, per affrontare i problemi relativi la teoria dei grafi e le sue applicazioni, disporre di alcune definizioni di base che permettano di descrivere le diverse tipologie di grafo e le proprietà che le caratterizzano.
Le definizioni che verranno enunciate si riferiscono essenzialmente due tipologie di approccio al contesto della teoria dei grafi:

- **descrizione di un grafo e dei suoi elementi;**
- **classificazione di un grafo per tipologia.**

In generale gli archi rappresentano una relazione fra una coppia di nodi; se tale coppia é ordinata cioè se gli archi hanno una ***testa*** *o* ***nodo di arrivo*** ed una ***coda*** *o* ***nodo di partenza***, il **grafo** si dice **orientato**, dove **(i,j)** indica un arco diretto dal nodo **i** al nodo **j**.
In un grafo orientato presa la coppia di nodi **(i,j)** **i** é detto ***predecessore*** di **j** e **j** é detto ***successore*** di **i**, così come è mostrato nello Schema 1. Nel caso in cui tuute le coppie di nodi presenti nel grafo non sono ordinate il grafo di dice **non orientato**.

Schema 1 - Arco orientato

[5] **Gustav Robert Kirchhoff** (*1824-1887*) fu fisico e matematico tedesco che focalizzò i suoi studi soprattutto nel campo della termodinamica e dell'elettrologia.

[6] **Arthur Cayley** (*1821-1895*) è stato uno tra i più noti ed importanti matematici inglesi famoso, tra l'altro, per il teorema di Hamilton-Cayley, fondamentale nel campo dell'algebra lineare.

[7] Il "*circuito a parametri concentrati*" è un circuito elettrico "*abbastanza piccolo*" per cui sia possibile trascurare il tempo di propaganzione del segnale e la tensione e la corrente risultano ben definiti in ogni punto del circuito ed in ogni istante. In questo contesto le leggi di Kirchhoff approssimano in maniera più che soddisfacente le leggi dell'elttromagnetismo di James Clerk Maxwell.

[8] Le mappe concettuali sono uno strumento che permettono la rappresentazione grafica sia delle informazioni che della conoscenza. Questa metodologia è stata teorizzata da Joseph Novak, oggi Professore Emerito alla Cornell University e Ricercatore Senior all'Institute for Human and Machine Cognition (IHMC), che negli anni '70 le immaginò con una struttura di tipo connessionista e come strumento di rappresentazione della propria conoscenza con un tagliocognitivo di tipo costruttivista.

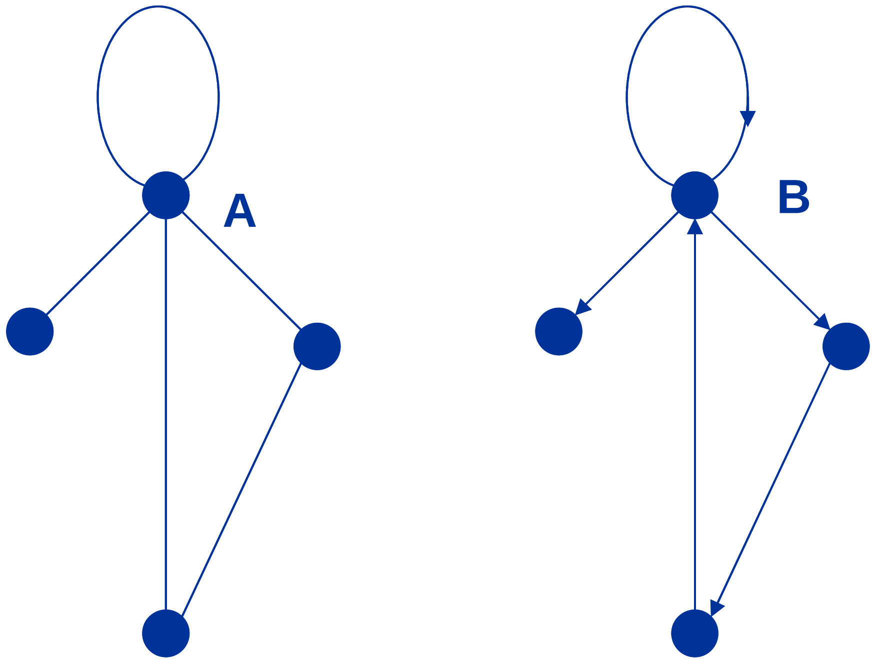


Figura 3 - Grafo semplice non orientato (A) e orientato (B).

Un grafo nel quale esistano più di un arco tra almeno una coppia di nodi é detto **multigrafo** *(vedi Figura 4)*, altrimenti si parla di **grafo semplice** *(vedi Figura 3)*.
Dato un grafo non orientato **G(N,A)** ed un grafo non orientato **H(V,E)** con V sottoinsieme di N ed E sottoinsieme di A, tale che gli archi di E sono tutti e solo quelli aventi entrambi i nodi terminali in V, H é detto **sottografo** di G; se, invece, E é strettamente un sottoinsieme degli archi di A aventi entrambi i nodi terminali in V, H é detto **grafo parziale** di G.
Si dice allora che un grafo G **copre** un grafo H se H é grafo parziale di G. In Figura 5 sono mostrati esempi di sottografi e grafi parziali.

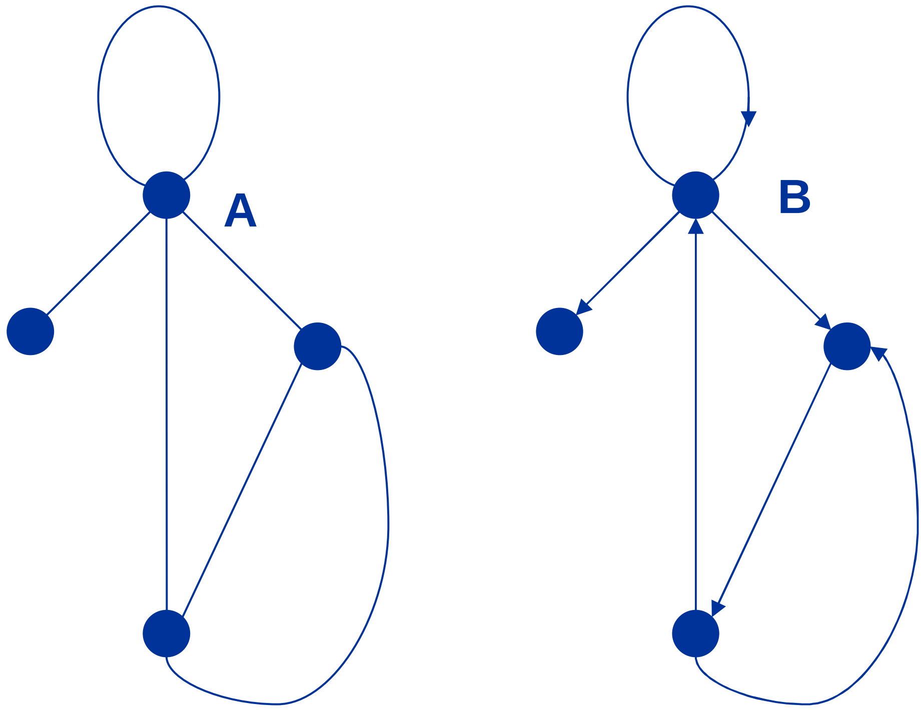


Figura 4 - Multigrafo non orientato (A) e multigrafo orientato (B)

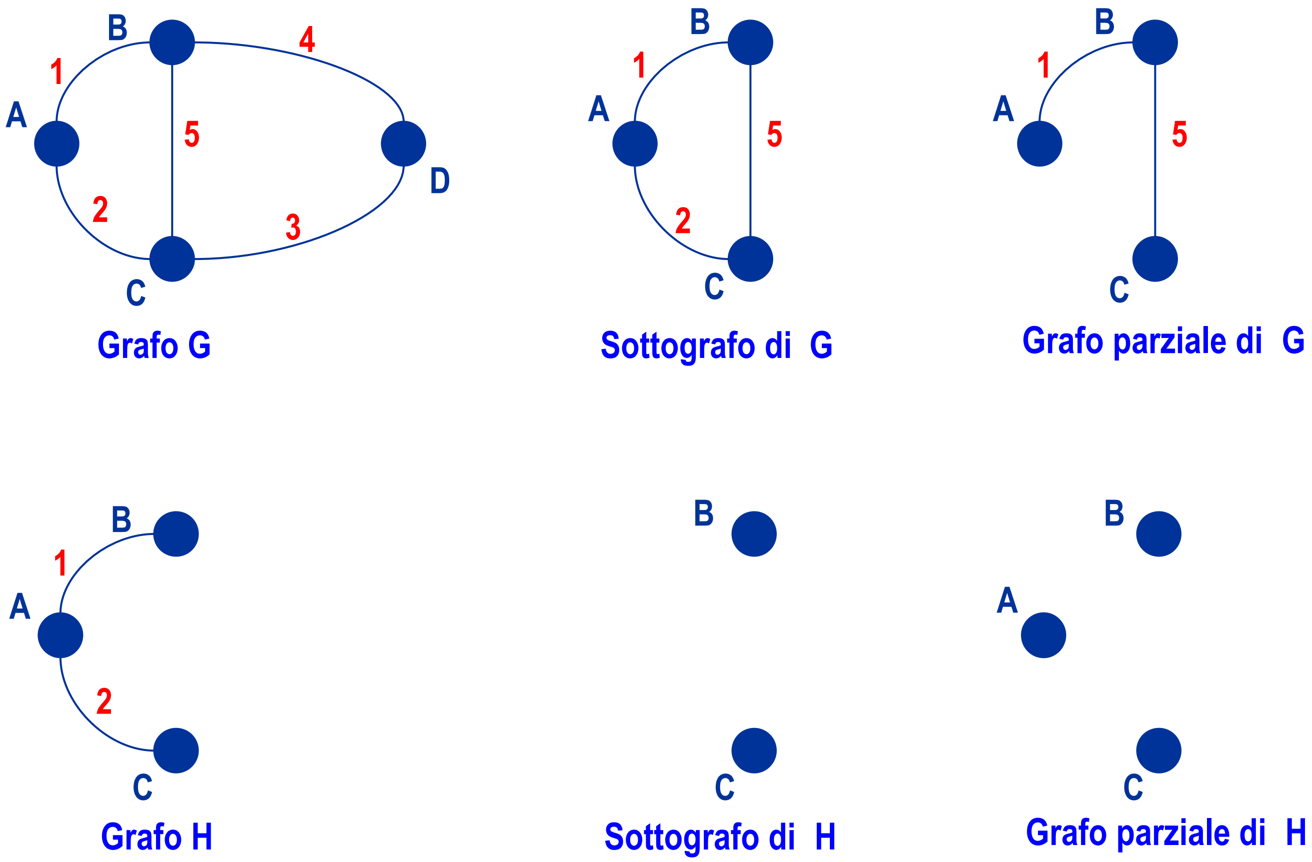


Figura 5 - Esemplificazione grafica di sottografo e grafo parziale

Definito che due archi si dicono **adiacenti** se esiste un nodo che è estremo per entrambi, in un *grafo non orientato* é detto **cammino** un insieme di archi **(a_1,a_2,...,a_n)** tale per cui a_i e a_{i+1} sono adiacenti.
In un *grafo orientato* si hanno due tipi di cammino:

- **cammino non orientato** o **catena** che non pone vincoli all'orientamento degli archi;
- **cammino** che richiede che la sequenza di archi sia tale che la testa di un arco coincida con la coda del successivo.

Se un cammino non passa mai due volte per lo stesso nodo é detto **cammino elementare** se invece non passa mai due volte per lo stesso arco é detto **cammino semplice**.
Un grafo tale per cui per ogni coppia di nodi esiste un cammino che li unisce é detto **grafo connesso**; nel caso di grafi orientati se esiste un cammino per ogni coppia di nodi si dice che il **grafo** é **fortemente connesso**, mentre se esiste solo un cammino non orientato fra ogni coppia di nodi il **grafo** si dice **debolmente connesso**.
Un nodo di un grafo non orientato si dice **adiacente** ad un altro nodo del grafo se esiste un arco che li congiunge; se un nodo non ha nodi adiacenti é detto **nodo isolato**.
Un **grafo** (*orientato o non orientato*) si dice **completo** se per ogni coppia di nodi esiste un arco che li congiunge.
Dato un grafo non orientato, il numero di archi incidenti su di un nodo (cioè tali per cui il nodo ne é un estremo), é detto **grado del nodo**.

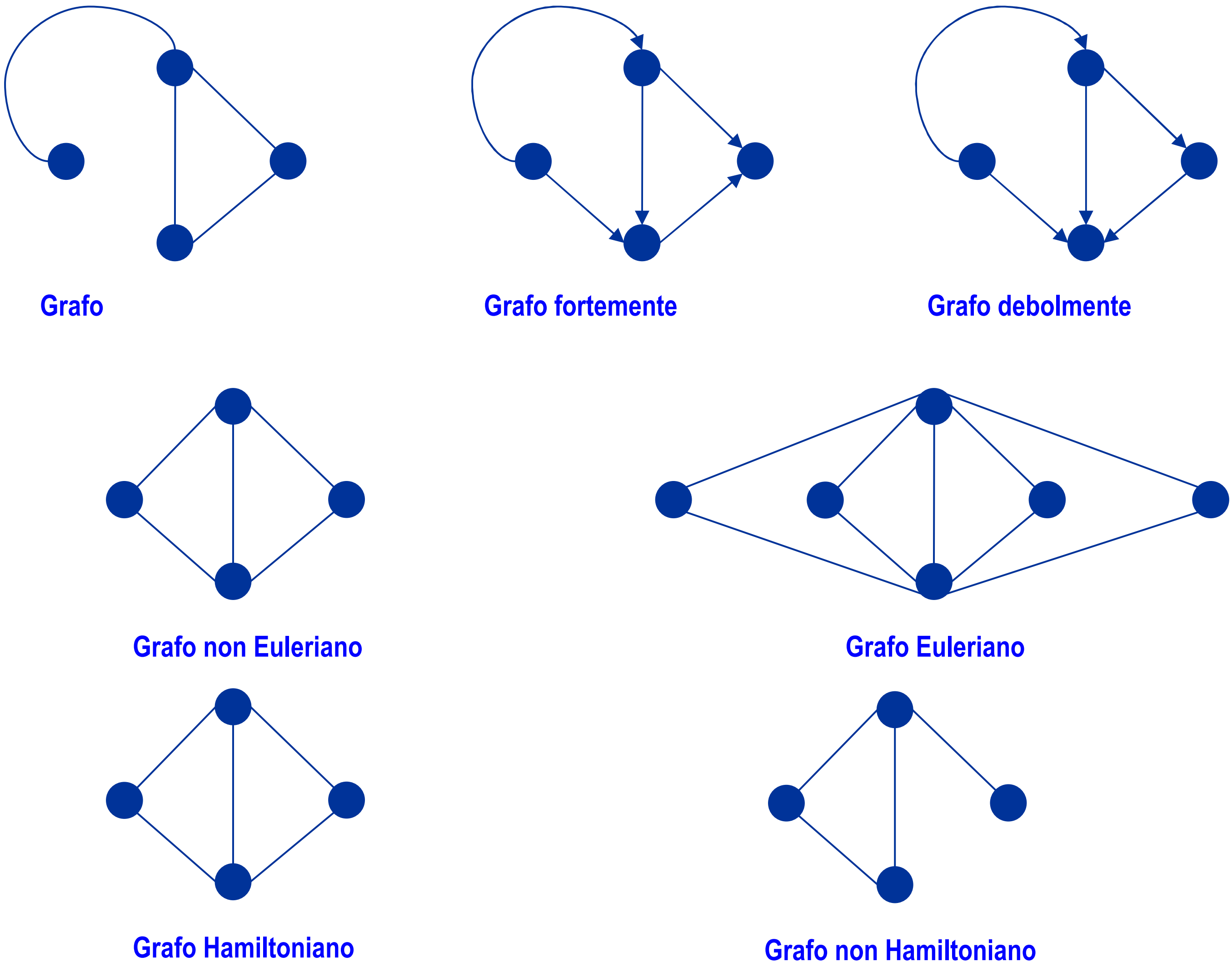


Figura 6 - Esempi di grafi connessi, euleriani ed hamiltoniani

Se tutti i nodi di un grafo hanno lo stesso grado (o ***cardinalità***) il grafo é detto regolare e se tale grado é **3** il grafo é detto **cubico**.
Dato un grafo G(N,A), non orientato, sia **d(i,j)** il minimo numero di archi necessario per costruire un cammino tra i nodi i e j, allora si dice **diametro del grafo D** la quantità:

$$D = \max_{(i,j)} d(i,j)$$

Inoltre si dice **centro del grafo** il nodo (o i nodi) per cui é minima la quantità **R(i)**:

$$R(i) = \max d(i,j)$$

Se k é il nodo centro o uno dei nodi centro, **R(k)** é detto **raggio del grafo**.

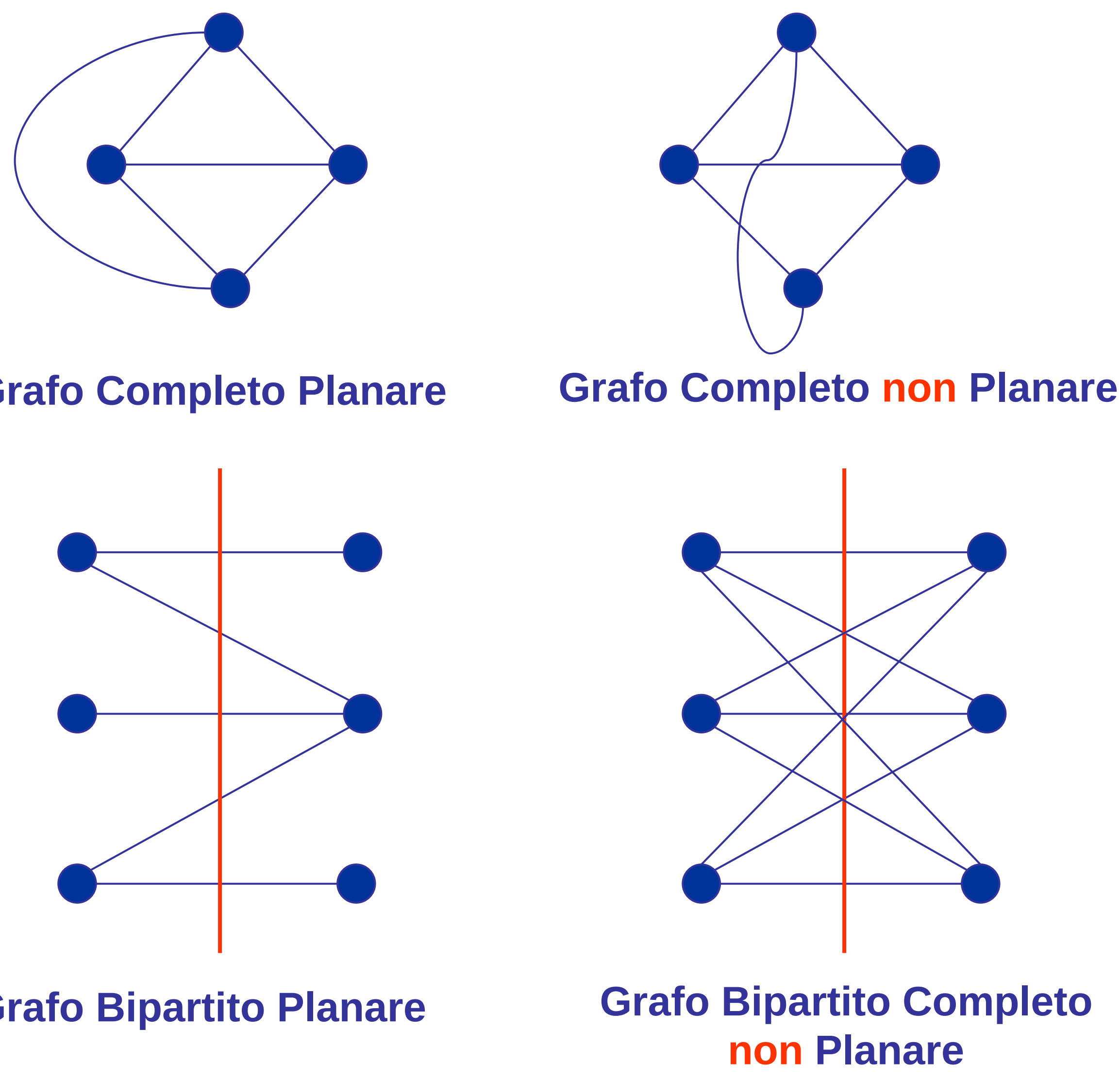


Figura 7 – Esempi di grafi planari e non planari, completi e bipartiti

Un'altra definizione importante nell'ambito della teoria dei grafi é il **ciclo** che é un cammino tale che il nodo di partenza e il nodo di arrivo coincidono; un ciclo che non passa mai due volte per lo stesso nodo é detto **cammino elementare**. Dato un grafo o un multigrafo, un ciclo che passa esattamente una volta per ogni arco é detto **ciclo euleriano**; per cui un grafo che ammette un ciclo euleriano é detto **grafo euleriano**, come si evince dal teorema di Eulero analizzato in precedenza e cioè: *"condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo connesso, non orientato sia euleriano é che tutti i suoi nodi abbiano grado pari".*

In maniera duale[9] un ciclo che passa esattamente una volta sola per ogni nodo é detto **ciclo hamiltoniano**[10] e un grafo che ammette un ciclo hamiltoniano é detto **grafo ha miltoniano** (esempi schematizzati in Figura 6).
Nel caso in cui un grafo non orientato sia privo di cicli forma una **foresta** e se é connesso allora forma un **albero** (ove il ciclo é vincolato a non passare più di una volta per ogni arco).
Il concetto di **ALBERO** é molto importante e, per tale struttura sono equivalenti le seguenti definizioni:

1. grafo connesso e senza cicli;
2. grafo connesso con n nodi e n-1 archi;

---

[9] In matematica il concetto di ***dualità*** indica la proprietà di due proposizioni ottenibili l'una dall'altra scambiando fra loro determinati enti o operazioni.

[10] Il nome deriva dal matematico irlandese William Rowland Hamilton (1805-1865) che si pose il problema di affrontare una variazione del teorema di Eulero e cioè: "*quali sono le condizioni affinché sia possibile determinare che un grafo ammette un ciclo che passa, una ed una sola volta, per ogni nodo*".

3. grafo senza cicli con n nodi e n-1 archi;
4. grafo senza cicli tale che comunque si aggiunga un arco si crea uno ed un solo ciclo;
5. grafo connesso tale che comunque si elimini un arco si ottiene un grafo non connesso;
6. grafo tale che per ogni coppia di nodi esiste esattamente un cammino che li collega.

In un albero i nodi di grado 1 sono detti **foglie**. Scelto un nodo e detto tale nodo **radice**, si introduce il concetto di **livello di un nodo** come il numero di archi che é necessario percorrere per giungere a tale radice.
Un albero in cui tutti i nodi hanno un grado minore o uguale a 3 é detto **albero binario**; tra questi alberi quelli che hanno un solo nodo di grado 2 é un **albero bilanciato**; se tutte le foglie, inoltre, sono allo stesso livello si dice essere un **albero bilanciato completo**; in questo ultimo tipo di albero, se **k** sono i livelli, i nodi sono **$(2^{(k+1)}-1)$**.
Da ultimo ricordiamo due definizioni (esempi schematizzati in Figura 7):

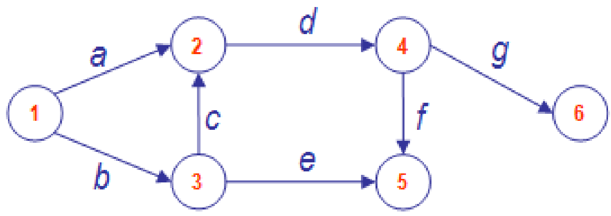
- **grafo bipartito**: un grafo (orientato o non orientato) tale che l'insieme N dei suoi nodi può essere scomposto nei due sottoinsiemi S e T (con (S U T) =N) per cui non esistono archi con entrambi i nodi terminali in S o in T; se poi per ogni coppia di nodi (i,j) con i appartenente a S e j appartenente a T esiste un arco che li congiunge il grafo é detto **bipartito completo**;
- **grafo planare**: un grafo tale che sia possibile disegnarlo su di un piano senza che gli archi si intersechino.

MEMORIZZAZIONE DI UN GRAFO

Un grafo G(N,A) può essere memorizzato su di un calcolatore in molteplici modi; la scelta del modo é fortemente dipendente dalle caratteristiche che si vogliono evidenziare, dal tipo di utilizzo che si intende fare, dalle dimensioni del grafo da memorizzare (numero di nodi e di archi) e dalla sua densità (numero di archi rispetto al numero di nodi).
Occupiamoci di tre modalità diverse di memorizzazione, che è possibile vedere schematizzati in Figura 8):

1) **matrice di connessione;**
2) **matrice di incidenza;**
3) **lista di adiacenza.**

Di queste la prima e l'ultima sono le più utilizzate; la prima é preferibile nel caso di grafi molto densi dove rispetto alla terza permette una maggiore efficienza ed immediatezza dei calcoli, mentre la terza si preferisce nel caso di grafi sparsi (cioè il numero di archi é piccolo rispetto al numero di nodi).
La matrice di incidenza, seppur meno efficace degli altri due metodi dal punto di vista computazionale, é preferibile in alcuni problemi di Ricerca Operativa in cui corrisponde molto bene ad alcuni modelli di ottimizzazione, per cui ne facilita la rappresentazione.
La **matrice di connessione** come metodo di memorizzazione, si basa sull'utilizzo di una **matrice quadrata nxn** (con n numero dei nodi del grafo), in cui il generico elemento (i,j) sarà 1 se esiste un arco che connette il nodo i con il nodo j e 0 negli altri casi; questo permette di memorizzare sia grafi orientati che grafi non orientati, notando che nel caso di *grafi non orientati la matrice sarà simmetrica* (l'elemento (i,j) é uguale all'elemento (j,i)).
Per quanto riguarda invece la **matrice di incidenza** essa si basa sulla memorizzazione di **una matrice nxm** (n numero dei nodi ed m numero degli archi del grafo); in tale matrice il generico elemento (i,j) (supponiamo di avere numerato gli archi) sarà 1 se l'arco j incide sul nodo e 0 se non incide sul nodo.
Per quanto riguarda i *grafi orientati* il generico elemento (i,j) sarà 1 se l'arco j esce dal nodo i, -1 se l'arco j entra nel nodo i e 0 se l'arco j non incide il nodo i.
Infine la **lista di adiacenza** é basata sulla memorizzazione di una lista in cui per ogni nodo del grafo vengono elencati i nodi adiacenti; tale lista richiede **un massimo di (n+m) elementi** (n numero di nodi ed n numero degli archi del grafo), un esempio dei metodi ora descritti é visibile in Figura 8.



1: 2, 3
2: 4
3: 5
4: 6
5:
6:

Lista di **ADIACENZA**

n/n	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Matrice di **CONNESSIONE** nxn
(n numero di nodi)

n/m	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	0	0	0	0	0
2	-1	0	-1	1	0	0	0
3	0	-1	1	0	1	0	0
4	0	0	0	-1	0	1	1
5	0	0	0	0	-1	-1	0
6	0	0	0	0	0	0	-1

Matrice di **INCIDENZA** nxm
(n numero di nodi – m nuero di archi)

Figura 8 - Metodi di memorizzazione di un grafo

RAPPRESENTAZIONE DI PROBLEMI

I grafi devono gran parte della loro importanza alla possibilità che offrono di rappresentare in modo semplice ed efficace un grande numero di problemi.

Il primo é il **problema dello scambio dei cavalli**[11], cioè data una scacchiera 3x3 e numerate le caselle come in figura, e posti i cavalli degli scacchi nelle caselle 1 e 3 (i bianchi) e nelle caselle 6 e 9 (i neri), ci si domanda se é possibile cambiare di posto ai cavalli (i bianchi in 6 e 9 ed i neri in 1 e 3) spostando un cavallo alla volta secondo la modalità degli scacchi senza mai avere due cavalli nella medesima casella.
Rappresentare le regole e lo schema di risoluzione del problema ora enunciato con l'ausilio di un grafo significa, così come è rappresentato in figura 9, associare ad ogni casella un nodo e definire che due nodi sono collegati da un arco solo se é possibile passare da uno all'altro, degli scacchi che rappresentano, con una mossa di cavallo.
Si osserva allora che la casella 5 non é raggiungibile, mentre il problema ha soluzione poiché basta far circolare i cavalli secondo lo schema del grafo, in modo da non sovrapporli in nessuna delle configurazione possibile.
Un altro problema, per così dire storico, è un enigma noto a tutti i bambini fin dai primi anni di scuola, e cioè il problema di **"salvare capra e cavolo"** che é anche un popolare modo di dire ma che trae origine da un rompicapo vecchio di secoli e la cui soluzione si deve a Tartaglia[12] (libro 16, N. 141) dove scrive anche *"e da questo è nasciuto un certo proverbio fra gli huomini, dicendo in qualche proposito, egli ha salvato la capra e i verzi"*.

[11] Il problema è stato proposto da Henry Ernest Dudeney (1857–1930) un matematico che si può definire un maestro della matematica divertente, autore di molti enigmi che permettono di approfondire i legami tra la matematica, la logica e il gioco.
[12] Niccolò Tartaglia (1499 ca – 1577), soprannome del matematicoNiccolò Fontana noto per il "triangolo di Tartaglia", metodo per lo sviluppo dei coefficienti di un binomio elevato a potenza, **$(a+b)^n$**, e per la formula di Cardano-Tartaglia per la risoluzione di equazioni cubiche.

Si tratta di questo: *"un uomo vuole traghettare da una sponda all'altra di un fiume un lupo, una capra ed un cavolo su di una barca capace solo di ospitare l'uomo e il cavolo ed una sola delle due bestie"*.
Ovviamente no si può lasciare soli il lupo e la capra oppure la capra e il cavolo altrimenti il lupo mangia la capra o la capra mangia il cavolo.
Come é possibile traghettare le tre cose senza perderne alcuna? Il grafo schematizzato in figura 10 mostra sinteticamente le mosse necessarie per la soluzione dell'enigma.

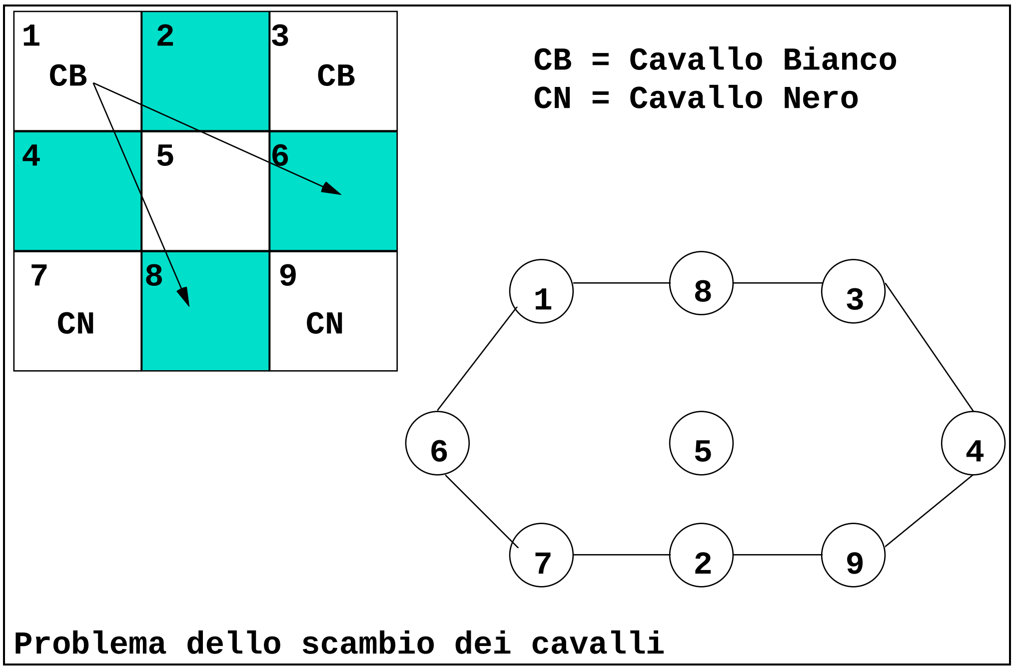


Figura 9 Grafo della soluzione del problema dei "quattro cavalli"

Lo strumento grafo è utilizzato anche nella schematizzazione di un altro fondamentale teorema il **teorema dei quattro colori**[13] che afferma:
"*data una superficie piana divisa in regioni connesse, come ad esempio una carta geografica, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore, dove per regini adiacenti si intendano aree che abbiano un segmento diconfine in comune*".
Anche questo problema può essere schematizzato in un grafo dove i punti sono le aree geografiche e gli archi le colleganono se hanno un segmento di confine in comune.
La dimostrazione è tuttavia assai complessa e per averne una dimostrazione si deve giungere al 1976 per opera di Kenneth Appel e Wolfgang Haken matematici dell'Università dell'Illinois, che poterono contare sull'ausilio fondamentale di calcolatori veloci e potenti.
Questo problema tuttavia riveste anche un'importanza metodologica poiché evidenzia come si possa affrontare un problema con l'ausilio fondamentale da una parte degli strumenti della logica ma dall'altra trasformandolo in un sistema che permetta un approccio topologico, così come aveva fatto Kirchhoff in relazine all'elettromagnetismo.
Un ulteriore esempio di applicazione della teoria dei grafi, e che interessa particolarmente i grafi planari, è il cosidetto problema "**le tre case e le tre forniture**" o come spesso è interpretato come gioco dai bambini "**le tre case e i tre pozzi**" e cioè: *"si possono collegare tre case a tre fornitori senza che le strade che le connettano si incrocino?*" o equivalentemente "*si possono collegare tre case a tre pozzi senza che le tubature che le uniscono ai pozzi si incrocino*" e eventualmente "*quale è il minimo numero possibile di incroci realizzabili*?".
Si dimostra che in un grafo planare questo problema non è risolvibile ed è 1 il numero minimo di incroci necessari.

[13] Il problema dei quattro colori è stato formulato per la prima volta nel 1852 da Francis Guthrie, scritto in particolare in una lettera al fratello Frederick, che era allievo di Augustus De Morgan (1806 – 1871) matematico e logico inglese.

Questi sono i problemi storici con cui la teoria dei grafi è stata sviluppata e non solo per affrontare sfide e giochi logici ma come strumento fondamentale di analisi matematica pura.

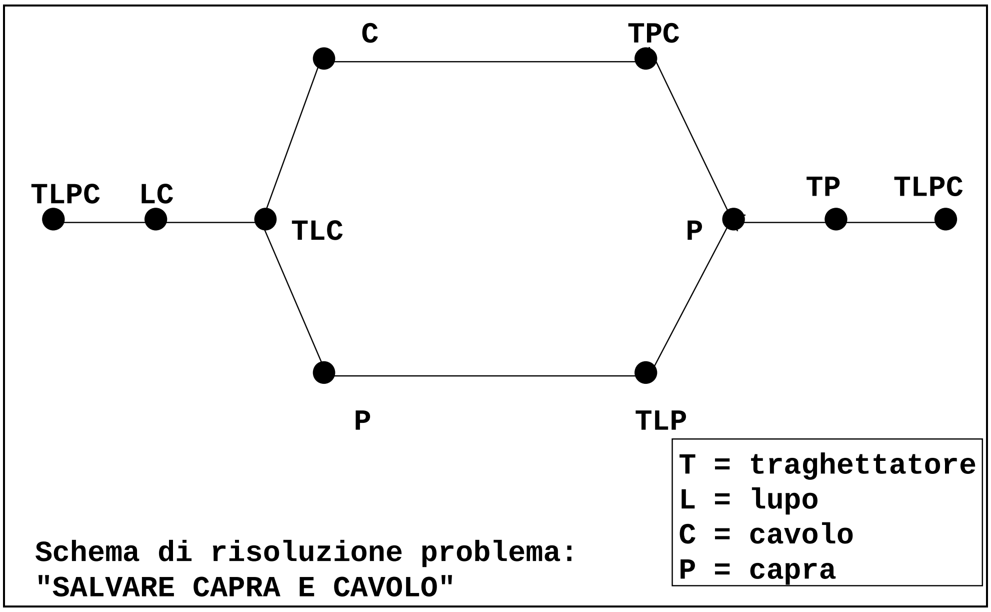


Figura 10 Grafo della soluzione del problema "salvare capra e cavolo"

Le applicazioni che si sono intraviste nell'affrontare i diversi problemi "storici" della teoria dei grafi si possono coniugare con diverse applicazioni pratiche ad esempio:

- problemi di trasporto e viabilità, definizione di reti stradali e percorsi ottimizzati (il problema dei ponti di Königsberg);
- definizione di circuiti elettrici, elettronici, schede stampate e ottimizzazione di reti di calcolatori per la distribuzione e l'immagazzinamento di informazioni (il problema delle tre case e delle tre forniture);
- assegnazioni di aree di controllo, distribuzione di dati nella memoria fisica di un calcolatre, aree di competenza per un responsabile di vendita (il problema dei quattro colori).

I cicli hamiltoniani, infine, portano ad interessarsi del cosiddetto "problema del commesso viaggiatore". Si può allora dire che l'opera iniziata da Eulero oggi continui non solo per il suo oggettivo interesse logico-matematico ma per l'importante contributo all'pproccio ai problemi che ha saputo evidenziare ed impostare.
La teoria dei grafi è un passo fondamentale per correggere quel modo di agire che Arthur Schopenhauer raccoglieva nell'aforisma "*L'errore nasce sempre dalla tendenza dell'uomo a dedurre la causa della conseguenza.*"

INDICE DELLE FIGURE

INDICE