Capitolo 27

Elementi di calcolo finanziario

EEE 2019-2020

27.1 Le diverse forme dell’interesse

- Si definisce ***capitale (C)*** uno stock di moneta disponibile in un determinato momento.
- Si definisce ***interesse (I)*** il prezzo d’uso del capitale.
- Si definisce ***saggio o tasso di interesse (r)*** l’interesse maturato dall’unità di capitale (1 €) nell’unità di tempo (1 anno)

27.1 Le diverse forme dell’interesse

- L’interesse rappresenta il **costo del denaro**
- dipende
  - dal rendimento che si può ritrarre impiegandolo in investimenti fruttiferi
  - ovvero dal sacrificio sopportato nel dilazionare un consumo presente per un consumo futuro
- osservazione di senso comune:
  - è sempre preferibile disporre di una somma subito piuttosto che posposta nel tempo

27.1 Perché è preferibile disporre di una somma di denaro subito piuttosto che posposta nel tempo?

- **Per diversi motivi:**
  - **Psicologici:** **gli uomini sono esseri mortali ed il tempo di vita non è infinito**
  - **Logici:** **più lontano è il momento del pagamento, maggiore è l'incertezza**
  - **Economici:** **il possesso del denaro fornisce, con il tempo, un interesse economico**

27.1 Le diverse forme dell'interesse

L'interesse può essere calcolato secondo diversi regimi:

- **Interesse semplice**
  - gli interessi maturati in un dato periodo non si sommano al capitale nel calcolo degli interessi del periodo successivo
- **Interesse composto**
  - gli interessi maturati alla fine di un dato periodo si sommano al capitale e quindi diventano fruttiferi per il periodo successivo

27.1 Le diverse forme dell'interesse

In relazione al momento della <u>maturazione</u>, nelle transazioni finanziarie l'interesse può avere le seguenti <u>scadenze</u>:

- Annuale → matura alla fine dell'anno — il più frequente
- Semestrale → matura alla fine del semestre
- Quadrimestrale → matura alla fine del quadrimestre
- Trimestrale → matura alla fine del trimestre
- Bimestrale → matura alla fine del bimestre
- Mensile → matura alla fine del mese

- Una volta <u>maturato</u>, l'interesse <u>può essere prelevato dal creditore</u>
- Se non è prelevato:
  - **in caso di interesse semplice, <u>non diventa fruttifero</u>**
  - **in caso di interesse composto, <u>diventa fruttifero</u>**

27.1 DEFINIZIONI

r = saggio di interesse
(annuale, semestrale, trimestrale ecc.)

n = durata temporale dell'operazione, misurata nel numero di <u>volte (cicli)</u> in cui l'interesse matura nel periodo di tempo considerato dall'operazione

NOTA BENE: **n** è da intendersi come la **frequenza** con cui l'interesse matura nel periodo di tempo considerato (è misurato in **cicli**)

27.1 Esempi di come si calcola **n**

n = durata temporale dell'operazione, misurata nel numero di volte (cicli) in cui l'interesse matura nel periodo considerato

1° esempio: INTERESSE ANNUALE

(n è espresso in numero di cicli annuali, cioè in anni)

PERIODO	**n (cicli annuali = anni)**	**calcolo (in mesi)**
3 mesi	n = 0,25	(3/12)
3 anni	n = 3	(36/12)
3 anni e 6 mesi	n = 3,5	(42/12)

27.1 Esempi di come si calcola **n**

n = durata temporale dell’operazione, misurata nel numero di <u>volte (cicli)</u> in cui l’interesse matura nel periodo considerato

2° esempio: INTERESSE SEMESTRALE

(n è espresso in <u>numero di cicli semestrali</u>)

<u>PERIODO</u>	**<u>n (cicli semestrali)</u>**	**<u>calcolo (in mesi)</u>**
3 mesi	n = 0,5	(3/6)
3 anni	n = 6	(36/6)
3 anni e 6 mesi	n = 7	(42/6)

27.1 Esempi di come si calcola **n**

n = durata temporale dell'operazione, misurata nel numero di <u>volte (cicli)</u> in cui l'interesse matura nel periodo considerato

3° esempio: INTERESSE TRIMESTRALE

(n è espresso in <u>numero di cicli trimestrali)</u>

<u>PERIODO</u>	**<u>n (cicli trimestrali)</u>**	**<u>calcolo (in mesi)</u>**
3 mesi	n = 1	(3/3)
3 anni	n = 12	(36/3)
3 anni e 6 mesi	n = 14	(42/3)

INTERESSE SEMPLICE

INTERESSE SEMPLICE

- implica che l'interesse è maturato, dovuto ed esigibile, solo una volta durante la vita del debito, e alla fine del periodo
- se si ricevono in prestito 100.0000 € al 10% annuo per 5 anni si dovrà versare il 50% (50.000 €) alla fine del 5° anno
- gli interessi maturati in un dato periodo <u>NON si sommano al capitale</u> nel calcolo degli interessi del periodo successivo
- in altre parole, gli interessi sono <u>infruttiferi</u>

ESEMPI DI INTERESSE SEMPLICE

- Un esempio pratico di interesse semplice è quello che di norma la Banca calcola all'interno dell'anno (infatti la Banca pratica usualmente un interesse composto annuo)
- In linea generale, le norme di legge riguardanti la stima di indennizzi dovrebbero prevedere l'adozione del regime semplice, nel calcolo degli interessi, ogni volta che si possano ipotizzare le seguenti condizioni:
  - IN CASO DI DANNO DA RISARCIRE: se il danno non fosse accaduto, il danneggiato avrebbe potuto prelevare dal bene/servizio in oggetto un'entrata economica solo alla fine del periodo
  - IN CASO DI BENEFICIO DA RESTITUIRE: se il beneficiato ha potuto fruire dal bene/servizio oggetto di valutazione di un entrata economica solo alla fine del periodo

27.2 - Interesse semplice

Calcolo dell'interesse

$$I = C_o r n$$

dove:

I = interesse maturato

C_0 = capitale iniziale

r = saggio di interesse

n = durata temporale (numero di cicli di maturazione dell'interesse nell'arco temporale considerato)

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: *Calcolo dell'interesse*

$$I = C_o r n$$

- Calcolare l'interesse maturato da un capitale di €100 depositato in banca al saggio **<u>annuale</u>** del 6%
- Per un anno:

C_0 = € 100

r = 0,06 annuale

n (annualità) = 1

$$I = 100 \times 0{,}06 \times 1 = € \, 6$$

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: *Calcolo dell'interesse*

$$I = C_o r n$$

- Calcolare l'interesse maturato da un capitale di €100 depositato in banca al saggio **annuale** del 6%
- Per 2 anni:

C_0 = € 100

r = 0,06 annuale

n (annualità) = 2

$$I = 100 \times 0{,}06 \times 2 = € \ 12$$

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: *Calcolo dell'interesse*

$$I = C_o r n$$

- Calcolare l'interesse maturato da un capitale di €100 depositato in banca al saggio **annuale** del 6%
- Per 272 giorni:

C_0 = € 100

r = 0,06 annuale

n (annualità) = 272/365 = 0,745

$$I = 100 \times 0{,}06 \times 0{,}745 = 100 \times 0{,}0447 = € \; 4{,}47$$

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: *Calcolo dell'interesse*

$$I = C_o r n$$

- Calcolare l'interesse maturato da un capitale di €100 depositato in banca al saggio **<u>annuale</u>** del 6%
- Per 1 anno e 272 giorni:

C_0 = € 100

r = 0,06 annuale

n (annualità) = 1 + 272/365 = 1 + 0,745 = 1,745

$$I = 100 \times 0{,}06 \times 1{,}745 = 100 \times 0{,}1047 = € \, 10{,}47$$

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: *Calcolo dell'interesse*

$$I = C_o r n$$

- Calcolare l'interesse maturato da un capitale di €100 depositato in banca al saggio **semestrale** del 3%
- Per un anno:

C_0 = 100 €

r = 0,03 semestrale

n *(semestralità)* = 12/6 = 2

$$I = 100 \times 0{,}03 \times 2 = € \ 6$$

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: *Calcolo dell'interesse*

$$I = C_o r n$$

- Calcolare l'interesse maturato da un capitale di €100 depositato in banca al saggio **semestrale** del 3%
- Per 2 anni:

C_0 = 100 €

r = 0,03 semestrale

n *(semestralità)* = 24/6 = 4

$$I = 100 \times 0,03 \times 4 = € \ 12$$

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: *Calcolo dell'interesse*

$$I = C_o r n$$

- Calcolare l'interesse maturato da un capitale di €100 depositato in banca al saggio **semestrale** del 3%
- Per 272 giorni:

C_0 = 100 €

r = 0,03 semestrale

n *(semestralità)* = 272/182,5 = 1,490

I = 100 × 0,03 × 1, 490 = 100 × 0,0447 = € 4,47

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: *Calcolo dell'interesse*

$$I = C_o r n$$

- Calcolare l'interesse maturato da un capitale di €100 depositato in banca al saggio **semestrale** del 3%
- Per 1 anno e 272 giorni:

C_0 = 100 €

r = 0,03 semestrale

n (semestralità) = 2+ 272/182,5 = 2 + 1,490 = 3,490

$$I = 100 \times 0{,}03 \times 3{,}490 = 100 \times 0{,}1047 = € \ 10{,}47$$

27.2 Attenzione

- Nel calcolare l'interesse <u>semplice</u>, se il saggio raddoppia e la durata si dimezza (o viceversa) il risultato finale non cambia, qualunque sia il numero di volte che l'interesse è maturato

- Ciò è dovuto al fatto che gli interessi maturati non si sommano al capitale e quindi non diventano fruttiferi

27.2 - Interesse semplice

Interesse: formule derivate

$$\boxed{I = C_o r n}$$

dove:
I = interesse maturato;
C_0 = capitale iniziale;
r = saggio di interesse;
n = durata temporale (numero di cicli di maturazione nell’arco temporale considerato)

Formule derivate:

$$\boxed{C_o = \frac{I}{rn}}$$

$$\boxed{r = \frac{I}{C_o n}}$$

$$\boxed{n = \frac{I}{C_o r}}$$

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: formule derivate

$$I = C_o r n$$

- Per un anno, con saggio <u>annuale del 6%</u>:

I = 100 × 0,06 × 1 = € 6

C_0 = 6 / 0,06 =100 €

r = 6 / 100 = 0,06

n = 6 / (100 x 0,06) = 6 / 6 = 1 ciclo (annuale)

27.2 - Interesse semplice

ESEMPIO: formule derivate

$$I = C_o r n$$

- Per un anno, con saggio <u>semestrale del 3%</u>:

I = 100 × 0,03 × 2 = € 6

C_0 = 6 / 0,03 x 2 =100 €

r = 6 / 100 x 2 = 0,03

n = 6 / (100 x 0,03) = 6 / 3 = 2 cicli (semestrali)

27.2 - Interesse semplice

Calcolo del montante

Si definisce **montante** (M_n) la somma del capitale e dei relativi interessi maturati in un determinato periodo di tempo

$$M_n = C_o(1 + rn)$$

dove:

M_n = montante

C_0 = capitale iniziale;

r = saggio di interesse;

n = durata temporale (numero di cicli di maturazione nell’arco temporale considerato)

$$M_n = C_o(1 + rn)$$

$$M = 100\ (1 + 0{,}06 \times 0{,}745) = 100 \times 1{,}0447 = € \ 104{,}47$$

27.2 - Interesse semplice

Calcolo del montante

Si definisce **montante** (M_n) la somma del capitale e dei relativi interessi maturati in un determinato periodo di tempo:

$$\boxed{M_n = C_o(1+rn)}$$

Il montante unitario è la somma di un capitale di 1 euro e dei relativi interessi maturati in un anno ed è indicato con il simbolo q:

$$q = (1 + rn) \longleftarrow \textit{montante unitario}$$

Formule derivate:

$$\boxed{C_o = \frac{M_n}{1+rn}} \quad \boxed{I = M_n\left(1-\frac{1}{1+rn}\right)} \quad \boxed{r = \frac{\frac{M_n}{C_o}-1}{n}} \quad \boxed{n = \frac{\frac{M_n}{C_o}-1}{r}}$$

$$M = 100\,(1 + 0{,}06 \times 0{,}745) = 100 \times 1{,}0447 = € \; 104{,}47$$

$$\boxed{C_o = \frac{M_n}{1+rn}} \quad \boxed{I = M_n\left(1 - \frac{1}{1+rn}\right)} \quad \boxed{r = \frac{\frac{M_n}{C_o} - 1}{n}} \quad \boxed{n = \frac{\frac{M_n}{C_o} - 1}{r}}$$

I problemi inversi sono risolti come segue:

$$C_0 = \frac{104{,}47}{(1 + 0{,}06 \times 0{,}745)} = \frac{104{,}47}{1{,}0447} = €\,100$$

$$r = \frac{\frac{104{,}47}{100} - 1}{0{,}745} = \frac{1{,}0447 - 1}{0{,}745} = \frac{0{,}0447}{0{,}745} = 0{,}06$$

$$n = \frac{\frac{104{,}47}{100} - 1}{0{,}06} = \frac{1{,}0447 - 1}{0{,}06} = \frac{0{,}0447}{0{,}06} = 0{,}745 \text{ anni } (272 \text{ giorni})$$

$$I = S_c = 104{,}47\left(1 - \frac{1}{1 + 0{,}06 \times 0{,}745}\right) = 104{,}47 \times 0{,}0428 = €\,4{,}47$$

Nota bene:

$$C_0 = M - Sc = 104{,}47 - 4{,}47 = € \; 100$$

INTERESSE COMPOSTO

INTERESSE COMPOSTO

- implica che l'interesse maturi, sia dovuto e sia esigibile, più volte durante la vita complessiva del debito
- in altre parole, nell’interesse composto, gli interessi maturati alla fine di un periodo <u>si sommano</u> al capitale, per divenire fruttiferi per il periodo successivo

INTERESSE COMPOSTO

- se si ricevono in prestito 100.000 € al 10% annuo per 5 anni, ma il creditore chiede che gli interessi dovuti (50.000) siano pagati <u>prima della fine del mandato</u>, per esempio in 5 rate annuali di pari importo (10.000 ciascuna),
  - il regime diventa di INTERESSE COMPOSTO
  - il debitore è costretto a rimborsare parte degli interessi prima della scadenza del mandato di 5 anni
    - così, perde la possibilità di guadagnare redditi con investendo questi soldi fino alla fine del 5° anno
  - viceversa, il creditore ottiene il vantaggio di poter investire le somme annuali rimborsate
    - e ha l'opportunità di guadagna interessi aggiuntivi

INTERESSE COMPOSTO

Calcolo del montante

Alla fine del primo periodo:

$$M_1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 r = C_0(1+r)$$

Alla fine del secondo periodo:

$$M_2 = M_1 + I_2 = M_1 + M_1 r = M_1(1+r) =$$

$$= C_0(1+r)(1+r) = C_0(1+r)^2$$

Alla fine del periodo ennesimo:

$$\boxed{M_n = C_0(1+r)^n = C_0 q^n}$$

27.3 - Interesse composto

Calcolo del montante e formule derivate

$$\boxed{M_n = C_0(1+r)^n = C_0 q^n}$$

Formule derivate:

$M_n = C_0 q^n$ → $\boxed{C_0 = \dfrac{M_n}{q^n}}$

$I = M_n - C_0 = C_0 q^n - C_0$ → $\boxed{I = C_0(q^n - 1)}$

$I = M_n - C_0 = M_n - M_n 1/q^n = M_n (1 - 1/q^n)$ → $\boxed{I = Sc = M_n \dfrac{q^n - 1}{q^n}}$

$(1 + r)^n = M_n / C_0$ → $(1 + r) = \sqrt[n]{\dfrac{M_n}{C_0}}$ → $\boxed{r = \sqrt[n]{\dfrac{M_n}{C_0}} - 1}$

$\log M_n = \log C_0 + n \log q$ → $n \log q = \log M_n - \log C_0$ $\boxed{n = \dfrac{\log M_n - \log C_0}{\log q}}$

27.2 Trasferimento dei valori nel tempo

- Le formule relative al montante dell'interesse composto servono per effettuare i trasferimenti dei valori nel tempo: posticipazioni e anticipazioni
- Sono operazioni necessarie quando i valori che si verificano in periodi diversi devono essere riportati allo stesso momento

27.2 Trasferimento dei valori nel tempo: esempio 1

- **POSTICIPARE =** sommare a un valore disponibile al momento 0 gli interessi maturati nell'intervallo da 0 a n
- **ANTICIPARE =** detrarre da un valore disponibile al momento n gli interessi maturati nell'intervallo da 0 a n

INTERESSE COMPOSTO ANNUO

- Un capitale di €100 disponibile oggi, impiegato per 3 anni al saggio d'interesse composto annuo del 5% produce un montante pari a:

$$\mathbf{M = €100 \times (1+0{,}05)^3 = €100 \times 1{,}16 = €116}$$

- Ciò significa che:

€100 disponibili oggi = €116 disponibili fra 3 anni

27.2 Trasferimento dei valori nel tempo: esempio 2

- **POSTICIPARE =** sommare a un valore disponibile al momento 0 gli interessi maturati nell'intervallo da 0 a n
- **ANTICIPARE =** detrarre da un valore disponibile al momento n gli interessi maturati nell'intervallo da 0 a n

INTERESSE COMPOSTO SEMESTRALE

- Un capitale di €100 disponibile oggi, impiegato per 3 anni al saggio d'interesse composto <u>semestrale</u> del 5% produce un montante pari a:

3 anni = 6 semestri

$$\mathbf{M = €100 \times (1+0,05)^6 = €100 \times 1,34 = €134}$$

- Ciò significa che:

€100 disponibili oggi = €134 disponibili fra 3 anni

27.2 Trasferimento dei valori nel tempo: esempio 3

- **POSTICIPARE =** sommare a un valore disponibile al momento 0 gli interessi maturati nell'intervallo da 0 a n
- **ANTICIPARE =** detrarre da un valore disponibile al momento n gli interessi maturati nell'intervallo da 0 a n

INTERESSE COMPOSTO SEMESTRALE

- Un capitale di €100 disponibile oggi, impiegato per 1 anno e mezzo al saggio d'interesse composto <u>semestrale</u> del 5% produce un montante pari a:

1 anno e mezzo = 3 semestri

$$\mathbf{M = €100 \times (1+0{,}05)^3 = €100 \times 1{,}16 = €116}$$

- Ciò significa che:

€100 disponibili oggi = €116 disponibili fra 1 anno e mezzo

27.2 Trasferimento dei valori nel tempo

Per r > 0

- posticipando si ottiene un valore superiore al valore di partenza:

$$C_0\, q^n > C_o \qquad q^n > 1$$

- anticipando si ottiene un valore inferiore al valore di partenza:

$$C_0\, 1/q^n > C_o \qquad 1/q^n > 1$$

Per r = 0 (saggio nullo)

- I valori posticipati o anticipati corrispondono al valore di partenza

$$q^n = 1 \qquad 1/q^n = 1$$

INTERESSE COMPOSTO
tempo impiegato da un capitale per raddoppiare
($q^n=2$)

Saggio annuale (r)	**Anni (approssimati)**
2%	35-36
3%	23-24
4%	17-18
5%	14-15
6%	11-12
7%	10-11
8%	9-10
9%	8-9
10%	7-8

27.4 - Periodicità

Rientrano nelle PERIODICITÀ i problemi legati al calcolo di:

- MUTUI a rate costanti
- Accumulazioni finali di rate costanti limitate di risparmio
- Valore del diritto di usufrutto
- Valore di capitalizzazione (accumulazione iniziale) di redditi futuri
- Ammortamenti finanziari

27.4 - Periodicità

sono **periodicità** i valori costanti che si verificano a intervalli di tempo regolari, corrispondenti al momento della maturazione dell’interesse, ovvero a periodi multipli degli stessi

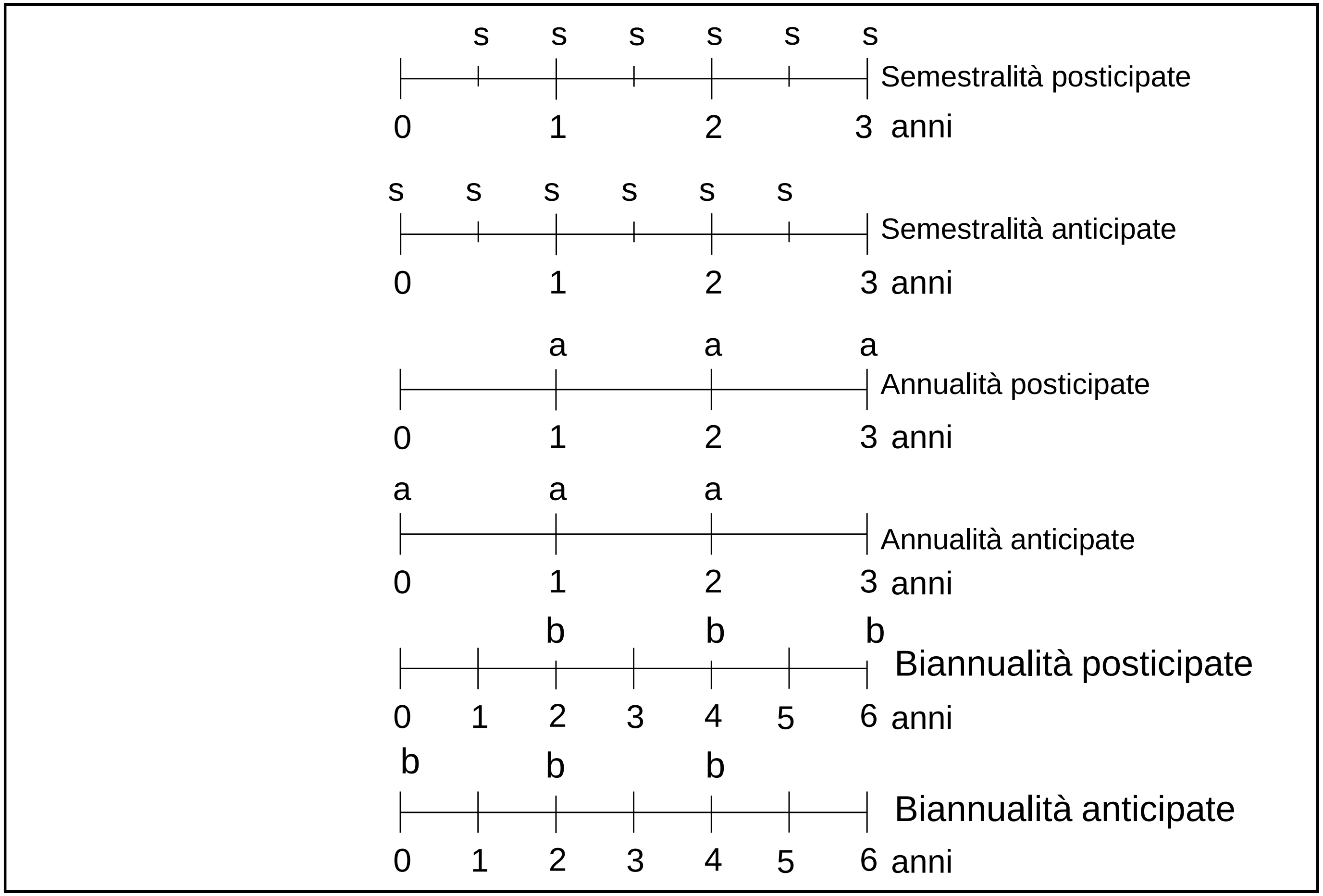
A seconda del periodo di scadenza:

- periodicità decennali
- p. quinquennali
- p. biennali
- p. annuali
- p. semestrali
- p. quadrimestrali
- p. trimestrali
- p. bimestrali
- p. mensili

27.4 - Periodicità

- rispetto al momento della scadenza, le periodicità possono essere **anticipate** (posizionate all'inizio del periodo) o **posticipate** (posizionate alla fine del periodo)
- rispetto alla durata, le periodicità possono essere limitate (numero di periodi limitato) o illimitate (numero illimitato di periodi)
- non confondere l'accumulazione finale/iniziale con la posticipazione/anticipazione:
  - le prime si riferiscono a valori periodici, che si ripetono nel tempo
  - le seconde a meri trasferimenti di singoli valori nel tempo

27.4 - Periodicità



sono **periodicità** i valori costanti che si verificano a intervalli di tempo regolari,

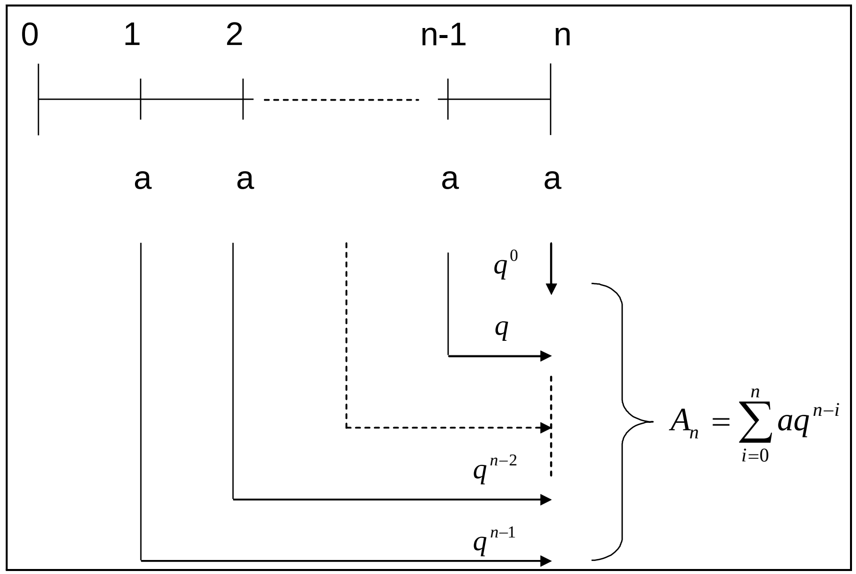
corrispondenti al momento della maturazione dell'interesse,

ovvero a periodi multipli degli stessi

27.5 Annualità

Periodicità costanti posticipate limitate:

Accumulazione finale



$$A_n = \sum_{i=0}^{n} aq^{n-i}$$

$$\boxed{A_n = a\frac{q^n - 1}{r}} \qquad (1)$$

Inversa:

$$\boxed{a = A_n \frac{r}{q^n - 1}} \qquad (2)$$

27.5 Periodicità

Periodicità costanti posticipate limitate: Accumulazione finale

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} a q^{n-i}$$

$$A_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$
$$A_n = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

Si tratta di una progressione geometrica con ragione q.

27.5 Periodicità

Periodicità costanti posticipate limitate:

Accumulazione finale

Si tratta di una progressione geometrica con ragione q.

La ragione in una progressione geometrica è data dal rapporto costante tra un termine e quello successivo.

La somma dei termini di una progressione geometrica si ottiene moltiplicando l'ultimo termine ($a*q^{n-1}$) per la ragione (q), sottraendo a questo risultato il primo termine ($a*q^0 = a$) e dividendo il tutto per la ragione meno 1.

$$A_n = \frac{aq^{n-1}q - aq^0}{q-1} = a\frac{q^{n-1}q-1}{q-1} = a\frac{q^n-1}{r} \qquad (1)$$

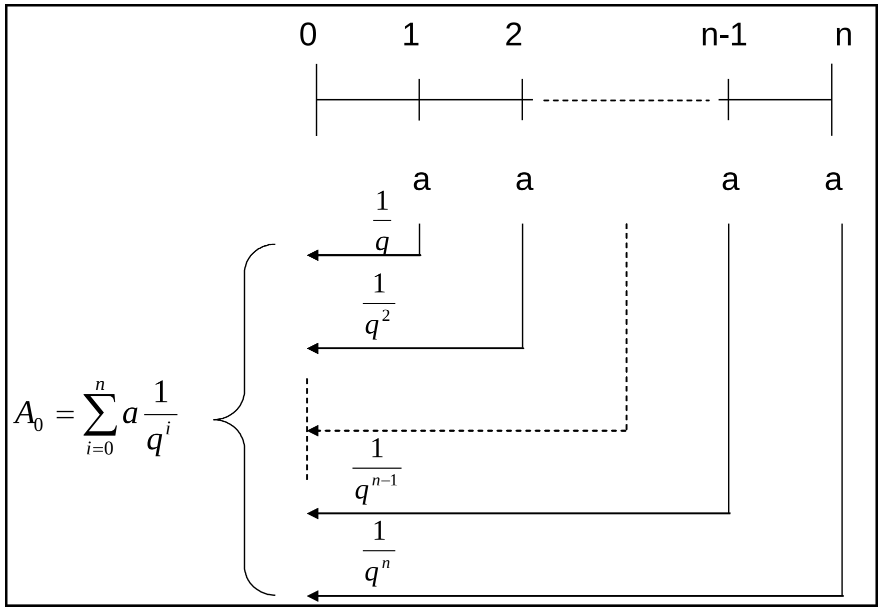
da cui deriva la (2)

27.5 Periodicità

Periodicità costanti posticipate limitate:

Accumulazione iniziale

$$A_0 = \sum_{i=0}^{n} a \frac{1}{q^i}$$



$$\boxed{A_0 = a \frac{q^n - 1}{r q^n}} \qquad (3)$$

Inversa:

$$\boxed{a = A_0 \frac{r q^n}{q^n - 1}} \qquad (4)$$

27.5 Periodicità

Periodicità costanti posticipate limitate: Accumulazione iniziale

$$A_0 = \sum_{i=0}^{n} a \frac{1}{q^i}$$

$$A_0 = a\frac{1}{q^n} + a\frac{1}{q^{n-1}} + a\frac{1}{q^{n-2}} + \ldots + a\frac{1}{q^2} + a\frac{1}{q}$$

$$A_0 = a\left(\frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}\right)$$

- Si tratta di una progressione geometrica con ragione q

27.5 Periodicità

Periodicità costanti posticipate limitate: accumulazione iniziale

Si tratta di una progressione geometrica con ragione q.

La ragione in una progressione è data dal rapporto costante tra un termine e quello successivo.

La sommatoria dei termini di una progressione geometrica si ottiene moltiplicando l'ultimo termine (a*1/q) per la ragione (q), sottraendo a questo risultato il primo termine (a*1/q^n) e dividendo il tutto per la ragione meno uno (q -1). In formula:

$$A_0 = a\frac{\frac{1}{q}q - \frac{1}{q^n}}{q-1} = a\frac{1-\frac{1}{q^n}}{1+r-1} = a\frac{\frac{q^n-1}{q^n}}{r}$$

$$\boxed{A_0 = a\frac{q^n-1}{rq^n}} \quad (3)$$

da cui deriva la (4)

27.5 Periodicità costanti limitate: ATTENZIONE

Per r > 0 e quindi per q > 1:

- Mediante l'accumulazione FINALE si ottiene sempre un valore SUPERIORE alla somma aritmetica delle periodicità

$$a\frac{q^n-1}{r} > a \times n \qquad \frac{q^n-1}{r} > n$$

- Mediante l'accumulazione INIZIALE si ottiene sempre un valore INFERIORE alla somma aritmetica delle periodicità

$$a\frac{q^n-1}{rq^n} < a \times n \qquad \frac{q^n-1}{rq^n} < n$$

27.5 – Periodicità

Periodicità costanti posticipate illimitate: Accumulazione iniziale

Per le periodicità illimitate ha significato economico solo l'accumulazione iniziale, che si ricava dalla formula delle periodicità limitate

$$A_0 = a\frac{q^n - 1}{rq^n} \qquad \text{per } n \to \infty$$

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} a\frac{q^n - 1}{rq^n} = \frac{a}{r}\lim_{n\to\infty}\frac{q^n - 1}{q^n} = \frac{a}{r}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q^n}{q^n} - \frac{1}{q^n}\right) = \frac{a}{r}(1-0)$$

$$A_0 = \frac{a}{r} \qquad (5)$$

27.5 Periodicità

Periodicità costanti posticipate illimitate: accumulazione iniziale

$$\boxed{A_0 = \frac{a}{r}} \qquad (5)$$

inversa:

$$\boxed{a = A_0 r} \qquad (6)$$

ESEMPIO:
Accumulazione iniziale di annualità illimitate

Calcolare l'accumulazione iniziale di una annualità posticipata illimitata (reddito) di € 300 al saggio annuo del 6%.

$$A_0 = \frac{300}{0{,}06} = 300\frac{1}{\frac{6}{10}} = 300\frac{100}{6} = 300 \times 16{,}67 = €5.001$$

Il problema inverso (calcolo dell'annualità) si risolve come segue:

$$a = 5.001\frac{6}{100} = 5.001 \times 0{,}06 = €300$$

27.5 Periodicità costanti illimitate: ATTENZIONE

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

Dividere per un saggio significa moltiplicare per l'inverso

Saggio % (r)	Saggio unitario	Moltiplicatore (1/ r)
1	0,01	100
2	0,02	50
3	0,03	33
4	0,04	25
5	0,05	20
6	0,06	17
7	0,07	14
8	0,08	13
9	0,09	11
10	0,10	10
20	0,20	5

ESEMPIO:
Accumulazione iniziale di annualità illimitate

ATTENZIONE:

Per n molto elevato la formula dell'accumulazione iniziale fornisce un risultato molto vicino a quello della capitalizzazione di annualità illimitate.

Con $n = 100$ anni:

$$A_0 = 300\frac{(1 + 0{,}06)^{100} - 1}{0{,}06(1 + 0{,}06)^{100}} = 300\frac{338{,}30}{20{,}35} = 300 \times 16{,}618 = €4.985$$

27.6 - Periodicità posticipate SINTESI

Periodicità costanti posticipate limitate: accumulazione finale

$$\boxed{A_n = a\frac{q^n - 1}{r}} \quad \boxed{a = A_n\frac{r}{q^n - 1}}$$

Periodicità costanti posticipate limitate: accumulazione iniziale

$$\boxed{A_0 = a\frac{q^n - 1}{rq^n}} \quad \boxed{a = A_0\frac{rq^n}{q^n - 1}}$$

Periodicità costanti posticipate illimitate:accumulazione iniziale

$$\boxed{A_0 = \frac{a}{r}} \quad \boxed{a = A_0 r}$$

27.6 - Periodicità anticipate

Le formule relative alle periodicità anticipate si ottengono da quelle indicate per i valori posticipati, mediante la posticipazione dei valori costanti (annuali, semestrali ecc.) cioè moltiplicando tali valori per il fattore q (A=accumulazione) e 1/q (a=quota)

Periodicità costanti anticipate limitate: accumulazione finale

$$\boxed{A_n = aq\frac{q^n - 1}{r}} \qquad \boxed{a = A_n \frac{1}{q}\frac{r}{q^n - 1}}$$

Periodicità costanti anticipate limitate: accumulazione iniziale

$$\boxed{A_0 = aq\frac{q^n - 1}{rq^n}} \qquad \boxed{a = A_0 \frac{1}{q}\frac{rq^n}{q^n - 1}}$$

Periodicità costanti anticipate illimitate:accumulazione iniziale

$$\boxed{A_0 = aq\frac{1}{r}} \qquad \boxed{a = \frac{A_0 r}{q}}$$

SAGGIO “NOMINALE” E SAGGIO EFFETTIVO

- Nel linguaggio comune, è prassi riferirsi al saggio d’interesse alla scadenza annuale, anche quando l’interesse matura per frazioni (o multipli) di anno
  - In altre parole, spesso ci si esprime **per approssimazione**
  - PER ESEMPIO:
    - nel caso di un saggio effettivo semestrale del 2,5%, è prassi comune indicarlo come un saggio nominale annuo (cioè approssimativo) del 5% (2,5% x 2)
- in questo caso, il saggio annuo nominale così calcolato (5%) ha un valore puramente indicativo
  - Ma il saggio annuo equivalente è più elevato del 5% nominale!
  - -> è $q^n - 1 = 1{,}025^2 - 1 = 0{,}050625 = 5{,}0625\%$

SAGGIO “NOMINALE” E SAGGIO EFFETTIVO

- Per ricavare il saggio effettivo (equivalente) annuo, corrispondente a un saggio nominale annuo che matura per periodi inferiori (**frazioni**) all’anno occorre calcolare il montante unitario a fine d’anno dell’unità di capitale e trovare per differenza il saggio
  - cioè sottraendo 1 al montante unitario a fine anno:

saggio annuo effettivo: $q^n - 1$

dove:

$q = 1 + r$ = montante effettivo annuo

r = saggio nominale annuo

SAGGIO "NOMINALE" E SAGGIO EFFETTIVO

- Quindi, se dico: saggio nominale annuo del 5% a scadenza semestrale, significa che:

a) il saggio effettivo semestrale è:

$$\mathbf{5\% : 2 = 2{,}5\%}$$

b) il saggio annuo equivalente è:

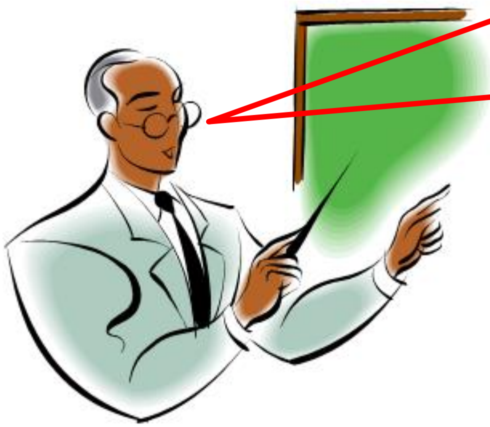
$$\mathbf{(1 + 0{,}025)^{2} - 1 = 1{,}050625 - 1 = 0{,}050625}$$

- Il 5,0625% effettivo equivalente è più elevato del 5% nominale

SAGGIO “NOMINALE” E SAGGIO EFFETTIVO

Il calcolo del saggio effettivo equivalente annuale serve per confrontare operazioni finanziarie simili, ma con diverso periodo di maturazione dell’interesse

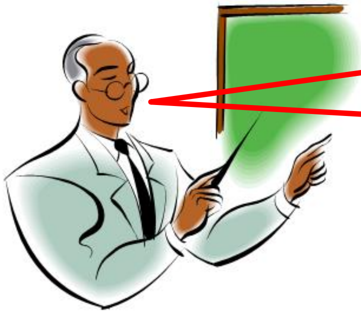
PER ESEMPIO:



QUAL È IL SAGGIO PIÙ ELEVATO?
IL 10% NOMINALE ANNUO A SCADENZA SEMESTRALE OPPURE L’ 11% EFFETTIVO ANNUO?

SAGGIO “NOMINALE” E SAGGIO EFFETTIVO

- RISPOSTA:

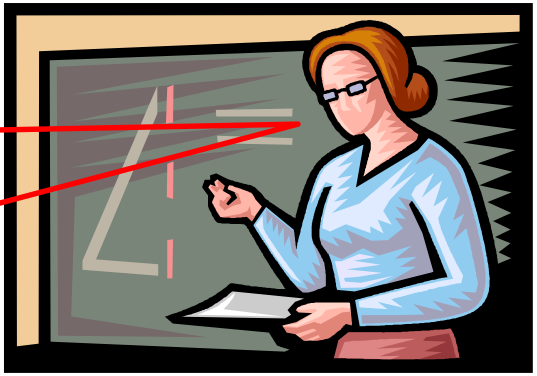


- Se il saggio “<u>nominale</u>” annuo è il 10%, ma con scadenza semestrale:
  - in un anno ci sono 2 semestri
  - il saggio semestrale effettivo è 10% : 2 = 5%
  - il montante unit. annuo (2 sem.) è $(1 + 0{,}05)^2 = 1{,}05^2 = 1{,}1025$
  - Il saggio annuale effettivo equivalente è pari a:
  - 1,050625 – 1 = 0,1025 = 10,25%
- È più elevato il saggio effettivo annuo dell’ 11%

SAGGIO “NOMINALE” E SAGGIO EFFETTIVO

- Le operazioni di calcolo finanziario devono essere sempre eseguite utilizzando **<u>il saggio effettivo</u> e non quello nominale**
- PER ESEMPIO:

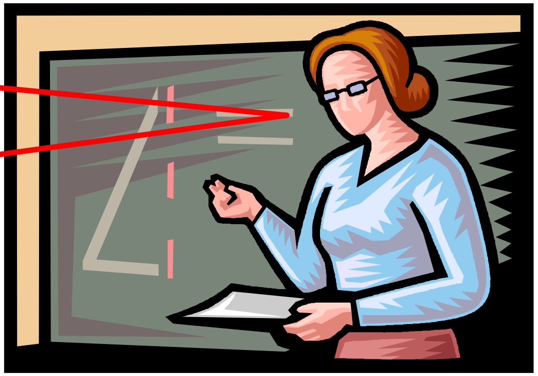
SE OGGI DEPOSITO 100 EURO AL SAGGIO NOMINALE ANNUO DEL 5% A SCADENZA SEMESTRALE, DI QUANTO DISPORRÒ TRA UN ANNO?



SAGGIO "NOMINALE" E SAGGIO EFFETTIVO

- RISPOSTA:

SE OGGI DEPOSITO 100 EURO AL SAGGIO NOMINALE ANNUO DEL 5% A SCADENZA SEMESTRALE, DI QUANTO DISPORRÒ TRA UN ANNO?



- Se il saggio "<u>nominale</u>" annuo è il 5%, ma con scadenza semestrale:
  - in un anno ci sono 2 semestri
  - il saggio semestrale effettivo è 5% : 2 = 2,5%
  - $M = C * (1+r)^{2}$
  - $M = 100$ euro $* (1 + 0{,}025)^2 = 100$ euro $* 1{,}050625$
  - $M = 105{,}0625$ euro

SAGGIO “NOMINALE” E SAGGIO EFFETTIVO

- ESERCIZIO: calcolare il saggio effettivo equivalente annuo nel caso di un saggio nominale annuo del 12% con scadenza trimestrale
- Se il saggio nominale annuo è il 12% con scadenza TRIMESTRALE:
  - in un anno ci sono 4 trimestri
  - il saggio trimestrale effettivo è 12% : 4 = 3%
  - il montante unit. a fine d’anno è $(1 + 0{,}03)^4 = 1{,}03^4 = 1{,}125509$
  - saggio annuale effettivo eq. = 1,125509 – 1 = 12,5509%

SAGGIO “NOMINALE” E SAGGIO EFFETTIVO

- Il calcolo del saggio effettivo equivalente serve nei casi in cui si hanno periodicità con scadenze pari a **multipli** del periodo di maturazione dell’interesse
- PER ESEMPIO:

CALCOLARE L’ACCUMULAZIONE FINALE DI 6 ANNUALITÀ POSTICIPATE DI € 100 AL SAGGIO D’INTERESSE DEL 3% SEMESTRALE

SCADENZA DELLE PERIODICITA' SUPERIORI AL PERIODO DI MATURAZIONE DELL'INTERESSE **(multipli)**

- In caso di periodicità (nell'esempio, annualità) con scadenze pari a **multipli** del periodo di maturazione dell'interesse (nell'esempio, semestrale), il saggio effettivo "di scadenza" (nell'esempio, annuale) risulta superiore al saggio "nominale" (calcolato algebricamente: nell'esempio,3%*2=6%)
- Il saggio effettivo equivalente "di scadenza" multipla si determina calcolando il montante dell'unità di capitale, al momento della scadenza multipla, e trovando per differenza il saggio
  - **Nell'esempio: $1{,}03^2 - 1 = 0{,}0609 = 6{,}09\%$**

SCADENZA DELLE PERIODICITA' SUPERIORE AL PERIODO DI MATURAZIONE DELL'INTERESSE: esempio 1

- Calcolare l'accumulazione finale di 6 annualità posticipate di € 100 al saggio d'interesse del 3% semestrale

  - Saggio effettivo eq. annuale **$1{,}03^2 - 1 = 0{,}0609 = 6{,}09\%$**

  - Accumulazione finale: $a\,\dfrac{q^n - 1}{r}$

$100 \times (1{,}0609^6 - 1) / 0{,}0609 = 100 \times 6{,}99 = € 699$

SCADENZA DELLE PERIODICITA' SUPERIORE AL PERIODO DI MATURAZIONE DELL'INTERESSE
esempio 2

- Accumulazione iniziale di un reddito quinquennale posticipato illimitato (capitalizzazione) di € 100 al saggio d'interesse del 4% annuale

  – Saggio effettivo equivalente quinquennale:

$$\mathbf{1{,}04^5 - 1 = 0{,}2166 = 21{,}66\%}$$

  – Accumulazione iniziale: $\dfrac{a}{r}$

$a \longrightarrow$ *reddito quinquennale*

$r \longrightarrow$ *saggio effettivo equivalente quinquennale*

$$\mathbf{100 \,/\, 0{,}2166 = 100 \times 4{,}62 = € \, 462}$$

SCADENZA DELLE PERIODICITA' SUPERIORE AL PERIODO DI MATURAZIONE DELL'INTERESSE
esempio 3

- Accumulazione finale di 8 rate triennali posticipate di € 100 al saggio d'interesse del 2% semestrale

  – Saggio effettivo eq. triennale **$1{,}02^6 - 1 = 0{,}1262 = 12{,}62\%$**

  – Accumulazione finale: $$a\frac{q^n - 1}{r}$$

$100 \times (1{,}1262^8 - 1) / 0{,}1262 = 100 \times (2{,}58707 - 1) / 0{,}1262 =$
$= 100 \times 12{,}58 =$ € 1258

SAGGIO “NOMINALE” E SAGGIO EFFETTIVO

- ATTENZIONE:
  - i termini “SAGGIO NOMINALE” e “SAGGIO EFFETTIVO” in questa trattazione non hanno nulla a che fare con il fenomeno dell’inflazione, ma solo con la modalità di calcolo:
    - *NOMINALE = APPROSSIMATIVO*
    - *EFFETTIVO = ESATTO*