

Capitolo 24

Elementi di calcolo finanziario

24.1 – Le diverse forme dell'interesse

- **Capitale** (C , stock di moneta disponibile in un dato momento)
- **Interesse** (I , prezzo d'uso del capitale)
- **Saggio o tasso di interesse (r)** (interesse maturato dall'unità di capitale, 1 €, nell'unità di tempo, 1 anno)

L'interesse può essere calcolato secondo diverse modalità:

- **Interesse semplice**
- **Interesse composto**

In relazione al momento di maturazione si distingue:

- **Interesse composto annuo** (il più frequente)
- **Interesse composto convertibile** (semestralmente, trimestralmente, ecc.)

24.2 - Interesse semplice

Calcolo dell'interesse

$$I = C_o r n$$

dove:

- I = interesse maturato;
- C_o = capitale iniziale;
- r = saggio di interesse;
- n = periodo di impiego del capitale espresso in anni o frazione di anno (giorni/365).

24.2 - Interesse semplice

Calcolo dell'interesse

$$I = C_o r n$$

dove:

I = interesse maturato;

C_o = capitale iniziale;

r = saggio di interesse;

n = periodo di impiego del capitale espresso in anni o frazione di anno (giorni/365).

Formule derivate:

$$C_o = \frac{I}{r n}$$

$$r = \frac{I}{C_o n}$$

$$n = \frac{I}{C_o r}$$

24.2 - Interesse semplice

Calcolo del montante

Si definisce **montante** (M_n) la somma del capitale e dei relativi interessi maturati in un determinato periodo di tempo

$$M_n = C_o (1 + rn)$$

dove:

- M_n = montante
- C_o = capitale iniziale;
- r = saggio di interesse;
- n = periodo di impiego del capitale espresso in anni o frazione di anno (giorni/365).

24.2 - Interesse semplice

Calcolo del montante

Si definisce **montante** (M_n) la somma del capitale e dei relativi interessi maturati in un determinato periodo di tempo:

$$M_n = C_o(1 + rn)$$

Il montante unitario è la somma di un capitale di 1 euro e dei relativi interessi maturati in un anno ed è indicato con il simbolo q :

$$q = (1 + r)$$

Formule derivate:

$$\boxed{C_o = \frac{M_n}{1 + rn}} \quad \boxed{I = M_n \left(1 - \frac{1}{1 + rn} \right)} \quad \boxed{r = \frac{\frac{M_n}{C_o} - 1}{n}} \quad \boxed{n = \frac{\frac{M_n}{C_o} - 1}{r}}$$

24.3 - Interesse composto annuo

Calcolo del montante

$$M_n = C_0(1 + r)^n = C_0 q^n$$

Formule derivate:

$$C_0 = \frac{M_n}{q^n}$$

$$I = M_n - C_0 = C_0 q^n - C_0 \longrightarrow I = C_0 (q^n - 1)$$

$$I = M_n - C_0 = M_n - M_n / q^n = M_n (1 - 1/q^n) \longrightarrow I = Sc = M_n \frac{q^n - 1}{q^n}$$

$$(1 + r)^n = M_n / C_0 \Rightarrow (1 + r) = \sqrt[n]{\frac{M_n}{C_0}} \longrightarrow r = \sqrt[n]{\frac{M_n}{C_0}} - 1$$

$$\log M_n = \log C_0 + n \log q \Rightarrow n \log q = \log M_n - \log C_0 \longrightarrow n = \frac{\log M_n - \log C_0}{\log q}$$

24.4 - Periodicità

Si definiscono **periodicità** i valori che si verificano ad intervalli di tempo regolari t .

Se $t=0,5$ (6 mesi) $\Rightarrow$ semestralità

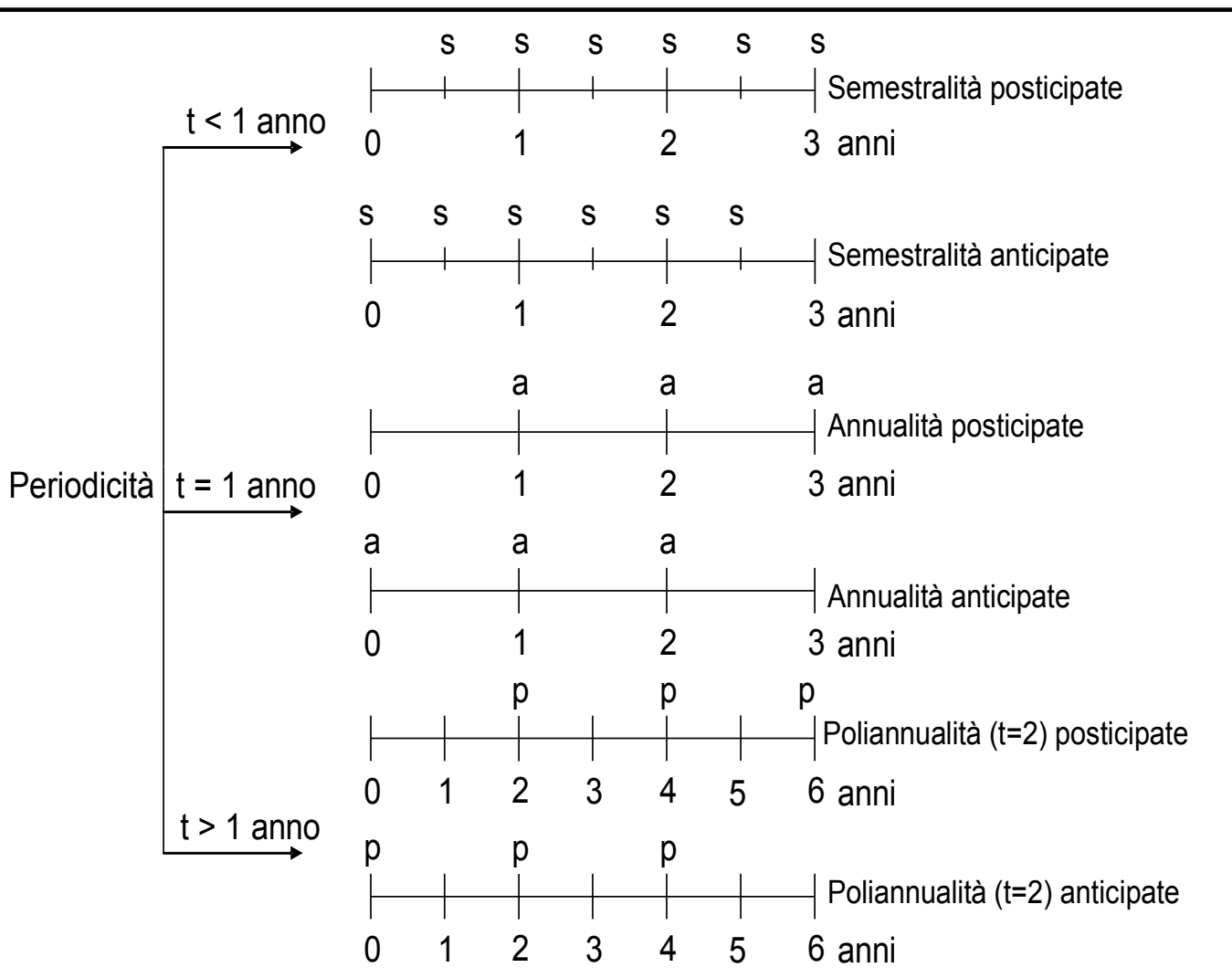
Se $t=1$ $\Rightarrow$ annualità

Se $t>1$ $\Rightarrow$ poliannualità

Possono essere **anticipate** (posizionate all'inizio di t) o **posticipate** (posizionate alla fine di t)

24.4 - Periodicità

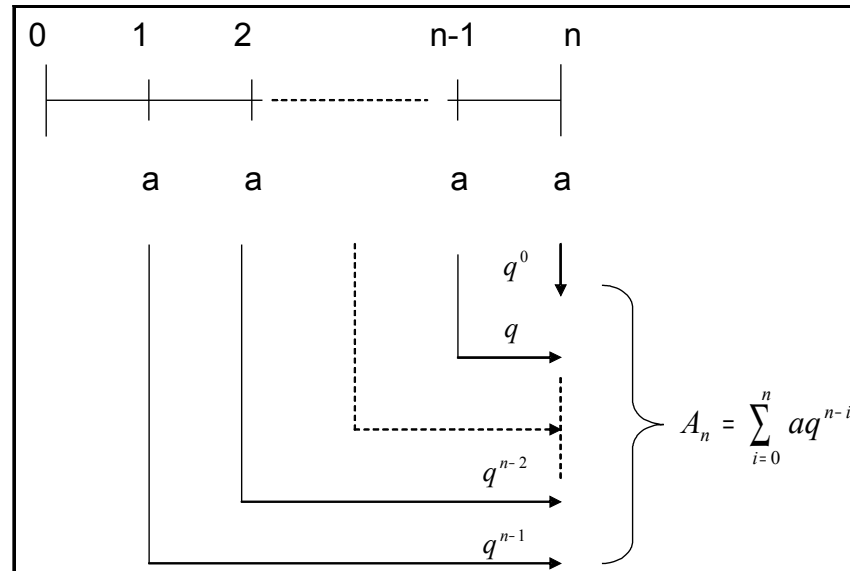
Si definiscono periodicità i valori che si verificano ad intervalli di tempo regolari t .



24.5 Annualità

Annualità costanti posticipate limitate:

Accumulazione finale



$$A_n = \sum_{i=0}^n aq^{n-i}$$

$$A_n = a \frac{q^n - 1}{r}$$

Inversa:

$$a = A_n \frac{r}{q^n - 1}$$

24.5 Annualità

Annualità costanti posticipate limitate: Accumulazione finale

$$A_n = \sum_{i=0}^n aq^{n-i}$$

$$A_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

$$A_n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

Si tratta di una progressione geometrica con ragione q .

24.5 Annualità

Annualità costanti posticipate limitate:

Accumulazione finale

Si tratta di una progressione geometrica con ragione q .

La ragione in una progressione geometrica è data dal rapporto costante tra un termine e quello successivo.

La somma dei termini di una progressione geometrica si ottiene moltiplicando l'ultimo termine ($a \cdot q^{n-1}$) per la ragione (q), sottraendo a questo risultato il primo termine ($a \cdot q^0 = a$) e dividendo il tutto per la ragione meno 1.

$$A_n = \frac{aq^{n-1}q - aq^0}{q - 1} = a \frac{q^{n-1}q - 1}{q - 1} = a \frac{q^n - 1}{r}$$

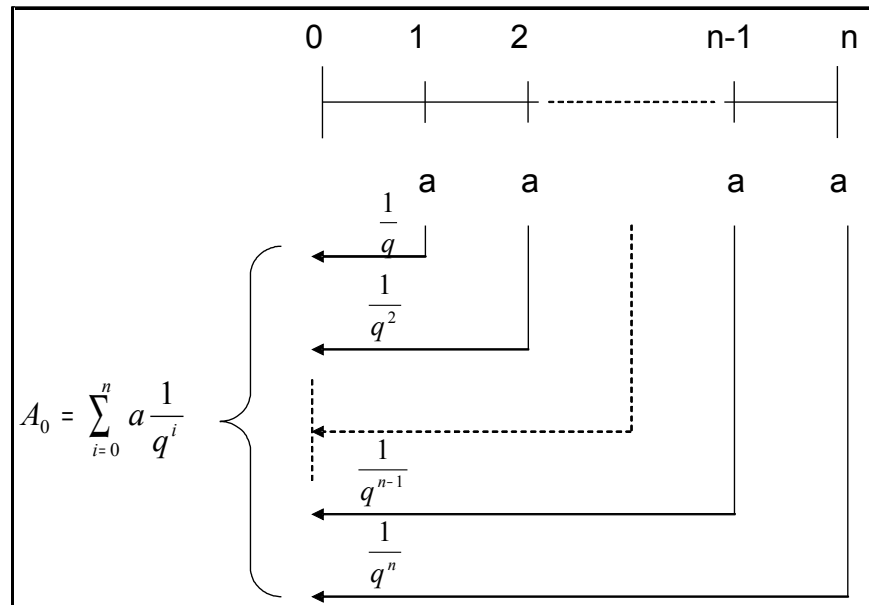
Da cui derivano le due formule di cui alla precedente slide.

24.5 Annualità

Annualità costanti posticipate limitate:

Accumulazione iniziale

$$A_0 = \sum_{i=0}^n a \frac{1}{q^i}$$



$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{rq^n}$$

Inversa:

$$a = A_0 \frac{rq^n}{q^n - 1}$$

24.5 Annualità

Annualità costanti posticipate limitate: Accumulazione iniziale

$$A_0 = \sum_{i=0}^n a \frac{1}{q^i}$$

$$A_0 = a \frac{1}{q^n} + a \frac{1}{q^{n-1}} + a \frac{1}{q^{n-2}} + \dots + a \frac{1}{q^2} + a \frac{1}{q}$$

$$A_0 = a \left(\frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^{n-2}} + \dots + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} \right)$$

- Si tratta di una progressione geometrica con ragione q

24.5 Annualità

Annualità costanti posticipate limitate: accumulazione iniziale

Si tratta di una progressione geometrica con ragione q .

La ragione in una progressione è data dal rapporto costante tra un termine e quello successivo.

La sommatoria dei termini di una progressione geometrica si ottiene moltiplicando l'ultimo termine ($a \cdot 1/q$) per la ragione (q), sottraendo a questo risultato il primo termine ($a \cdot 1/q^n$) e dividendo il tutto per la ragione meno uno ($q - 1$). In formula:

$$A_0 = a \frac{\frac{1}{q} q - \frac{1}{q^n}}{q - 1} = a \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 + r - 1} = a \frac{q^n - 1}{q^n r}$$

$$A_0 = \frac{q^n - 1}{r q^n}$$

24.5 – Annualità

Annualità costanti posticipate illimitate: Accumulazione iniziale

Per le annualità illimitate ha significato economico solo l'accumulazione iniziale, che si ricava dalla formula delle annualità limitate.

$$A_0 = a \frac{q^n - 1}{rq^n} \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

$$A_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{q^n - 1}{rq^n} = \frac{a}{r} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n - 1}{q^n} = \frac{a}{r} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q^n}{q^n} - \frac{1}{q^n} \right) = \frac{a}{r} (1 - 0)$$

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

24.5 – Annualità

Annualità costanti posticipate illimitate:

Accumulazione iniziale

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

inversa:

$$a = A_0 r$$

24.6 – Poliannualità

*Poliannualità costanti posticipate limitate:
Accumulazione finale*

$$A_{nt} = p \frac{q^{nt} - 1}{q^t - 1}$$

Inversa:

$$p = A_{nt} \frac{q^t - 1}{q^{nt} - 1}$$

dove:

t = numero di anni del periodo (intervallo di tempo che intercorre tra il verificarsi di due successivi valori periodici);

n = numero dei periodi.

24.6 – Poliannualità

*Poliannualità costanti posticipate limitate:
Accumulazione iniziale*

$$A_0 = p \frac{q^{nt} - 1}{q^t - 1} \frac{1}{q^{nt}}$$

Inversa:

$$p = A_0 \frac{q^t - 1}{q^{nt} - 1} q^{nt}$$

24.6 – Poliannualità

*Poliannualità costanti posticipate illimitate:
Accumulazione iniziale*

$$A_0 = p \frac{1}{q^t - 1}$$

Inversa:

$$p = A_0 (q^t - 1)$$

24.7 - Periodicità anticipate

Annualità costanti anticipate limitate: accumulazione finale

$$A_n = aq \frac{q^n - 1}{r}$$

$$a = A_n \frac{1}{q} \frac{r}{q^n - 1}$$

Annualità costanti anticipate limitate: accumulazione iniziale

$$A_0 = aq \frac{q^n - 1}{rq^n}$$

$$a = A_0 \frac{1}{q} \frac{rq^n}{q^n - 1}$$

Annualità costanti anticipate illimitate: accumulazione iniziale

$$A_0 = aq \frac{1}{r}$$

$$a = \frac{A_0}{r} \frac{1}{q}$$

24.7 - Periodicità anticipate

Poliannualità costanti anticipate limitate: accumulazione finale

$$A_{nt} = p q^t \frac{q^{nt} - 1}{q^t - 1} \quad p = A_{nt} \frac{1}{q^t} \frac{q^t - 1}{q^{nt} - 1}$$

Poliannualità costanti anticipate limitate: accumulazione iniziale

$$A_0 = p q^t \frac{q^{nt} - 1}{q^t - 1} \frac{1}{q^{nt}} \quad p = A_{nt} \frac{1}{q^t} \frac{q^t - 1}{q^{nt} - 1} q^{nt}$$

Poliannualità costanti anticipate illimitate: accumulazione iniziale

$$A_0 = p q^t \frac{1}{q^t - 1} \quad p = A_0 \frac{1}{q^t} (q^t - 1)$$

24.8 - Interesse convertibile

- **Interesse composto convertibile**
- **Saggio d'interesse annuo convertibile (rac)**
- **Saggio d'interesse periodico effettivo (rpe)**
- **Saggio d'interesse annuo effettivo (rae)**