Esercitazioni di probabilità e statistica

Variabili aleatorie, distribuzioni

Esercizio 3.1:

La variabile aleatoria X di Laplace è definita mediante la densità di probabilità:

$$f_X(x) = Ae^{-|x|}, \qquad x, A \in \mathrm{R}, \quad A > 0$$

a) Si calcoli il valore del parametro A affinchè $f_X(x)$ sia normalizzata.
b) Si determini la funzione di distribuzione (ripartizione), discutendo la regolarità di tale funzione per x=0.
c) Si calcoli media, moda e mediana di$X$.
d) Si calcoli la varianza, i coefficienti di asimmetria e di curtosi, commentando i valori determinati.
e) Calcolare la funzione generatrice dei momenti e la funzione caratteristica.

Soluzione: Iniziamo a svolgere l'esercizio:
a) Per calcolare $A \in \mathrm{R}^+$ dobbiamo normalizzare la densità di probabilità $f_X(x)$:

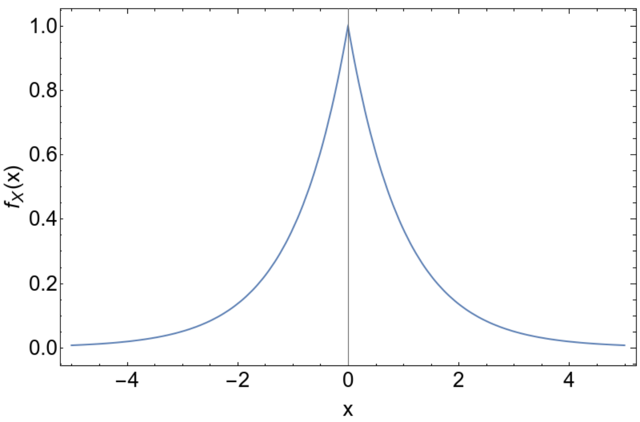
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx &= 1 \\
A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, dx &= 1 \\
2A \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}\, dx &= 1 \\
2A &= 1 \\
A &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) La funzione che fa corrispondere ai valori di x, le probabilità cumulate $\Pr\{X \leq x\}$ viene detta funzione di distribuzione (ripartizione) è indicata con ed è così definita $F_X(x)$:

$$F_X : \mathrm{R} \to [0, 1], \qquad F_X(x) := \Pr\{X < x\}$$

Quindi in questo caso:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \Pr\{X < x\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{-|x'|}\, dx' \\
(x < 0), \qquad F_X(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{x'}\, dx' = \frac{1}{2} e^{x} \\
(x > 0), \qquad F_X(x) &= F(0) + \frac{1}{2} \int_{0}^{x} e^{-x'}\, dx' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-x})
\end{aligned}$$



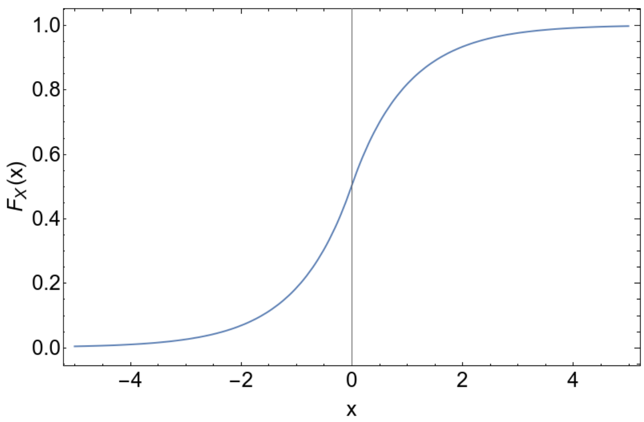


Figura 1: Densità di probabilità (sinstra) e funzione di distribuzione (destra)

La funzione di distribuzione $F_X(x)$ è continua e derivabile in $x = 0$.

c) Per quanto riguarda moda, media, mediana, varianza, skewness e kurtosis si trovano usando l'operatore $E\{X^q\}$ per trovare i momenti di una distribuzione:

Media:

$$\begin{aligned}\mu &= E\{X\} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-|x|}\, dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Il che è abbastanza naturale dato che la funzione è dispari.

Moda: sono i valori che accorrono con maggior frequenza quindi per una variabile aleatoria continua sono il massimo:

$$x = 0$$

è il punto di max della funzione.

Mediana: è il valore per il quale l'integrale:

$$F_X(x_0 - \epsilon) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(x_0), \qquad \forall \epsilon > 0$$

In questo caso abbiamo che:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\, dx = 1 \\ \int_{0}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1\end{aligned}$$

quindi la mediana è ancora $x = 0$.

d) Varianza, skewness e kurtosis sono i momenti 2, 3 e 4 dell'operatore $E\{X\}$:

$$\begin{aligned}Var\{X\} &= E\{X^2\} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\, dx \\ &= \int_{0}^{\infty} x^2\, f_X(x)\, dx \\ &= \Gamma(3) \\ &= 2! \\ &= 2\end{aligned}$$

questi tipi di integrali si risolvono con la funzione $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n\, e^{-t}\, dt = n!$$

L'asimmetria o skewness è il momento terzo fatto rispetto alla media e pesato sul cubo della deviazione standard

$$\begin{aligned}\gamma\{X\} &= \frac{E\{(X-\mu)^3\}}{\sigma^3} \\ &= 0\end{aligned}$$

in quanto è una funzione dispari e quindi simmetrica rispetto all'asse y.

La kurtosis o il grado di decrescenza della funzione si ottiene con il momento quarto pesato rispetto alla media e alla quarta potenza della deviazione standard:

$$\begin{aligned}\eta\{X\} &= \frac{E\{(X-\mu)^4\}}{\sigma^4} \\ &= \frac{E\{X^4\}}{\sigma^4} \\ &= \frac{\int_0^{\infty} x^4\, e^{-x}\, dx}{4} \\ &= \frac{\Gamma(5)}{4} \\ &= \frac{24}{4} \\ &= 6\end{aligned}$$

Normalmente per una gaussiana $\eta = 3$.

e) Per calcolare la funzione generatrice dei momenti e la funzione caratteristica dobbiamo sapere le corrispettive definizioni:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E\{e^{tx}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f_X(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, e^{-|x|}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{tx}\, e^{x}\, dx + \int_0^{\infty} e^{tx}\, e^{-x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\, \frac{e^{(t+1)x}}{t+1}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\, \frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\bigg|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} \\ &= \frac{1}{1-t^2} \\ &\to |t| < 1\end{aligned}$$

Per la funzione caratteristica invece:

$$
\begin{aligned}
H_X(t) &= E\{e^{itx}\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, f_X(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, e^{-|x|}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{itx}\, e^{x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx}\, e^{-x}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{e^{(it+1)x}}{it+1}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{(it-1)x}}{it-1}\bigg|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{it+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{it-1} \\
&= \frac{1}{1+t^2} \\
&\rightarrow t \in \mathrm{R}
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.2:

Sia X una variabile aleatoria con densità di probabilità :

$$
f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x > 0 \end{cases}
$$

dove θ è un parametro reale positivo.
a) Calcolare media e moda.
b) si consideri ora la variabile aleatoria ottenuta tramite la trasformazione $Y = X^2$. Calcolare la funzione di densità di probabilità per Y. Dire di che variabile aleatoria si tratta e da quali parametri è caratterizzata.
c) Calcolare la funzione di distribuzione per Y.
d) Si consideri infine la trasformazione $Z = e^{-\frac{X^2}{\theta}}$. Di che variabile aleatoria di tratta? Calcolare la funzione di distribuzione per la variabile Z. Per quali valori risulta definita?

Soluzione: X è una variabile aleatoria di Rayleight, calcoliamo media e mediana:

$$
\begin{aligned}
\mu &= E\{X\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx \\
&= \frac{2}{\theta}\int_{0}^{\infty} x^2\, e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx \\
&= -\frac{2}{\theta}\frac{d}{d(\frac{1}{\theta})}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx \\
&= -\frac{2}{\theta}\frac{d}{dy}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{y}} \qquad \textit{sapendo che} \qquad \frac{d}{dy}\sqrt{\frac{1}{y}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{\theta}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}
\end{aligned}
$$

Moda:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$
$$\frac{2}{\theta}\left[e^{-\frac{x^2}{\theta}} - \frac{2}{\theta}x^2 e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right] = 0$$
$$x = \sqrt{\frac{\theta}{2}}$$

b) Imponiamo $Y = X^2$ e ricalcoliamoci la funzione di densità.

$$f_Y(y) = f_X(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{2\sqrt{y}}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}\frac{1}{2\sqrt{y}} & y > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}} & y > 0 \end{cases}$$

Si tratta di una variabile esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{\theta}$.

c) Calcoliamo la funzione di distribuzione:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy \\ &= \frac{1}{\theta}\int_0^y e^{-\frac{y}{\theta}}\,dy \\ &= -e^{-\frac{y}{\theta}}\Big|_0^y \\ &= 1 - e^{-\frac{y}{\theta}} \qquad (y > 0) \end{aligned}$$

d) Consideriamo la trasformazione $Z = e^{-\frac{X^2}{\theta}}$ dove quindi abbiamo una nuova variabile ξ che è decrescente al crescere di x. Quindi:

$$\begin{aligned} F_Z(\xi) &= \Pr\{Z \leq \xi\} \\ &= \Pr\{e^{-\frac{Y}{\theta}} \leq \xi\} \\ &= \Pr\{-Y \leq \theta \ln \xi\} \\ &= \Pr\{Y \geq \theta \ln \frac{1}{\xi}\} \\ &= 1 - F_Y(\theta \ln \frac{1}{\xi}) \end{aligned}$$

Quindi:

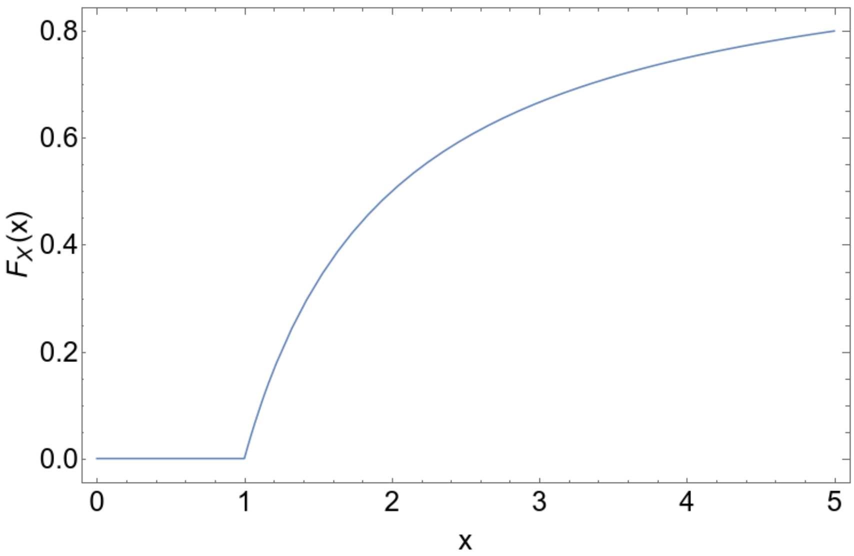
$$f_Z(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \leq 0 \\ \xi & 0 < \xi < 1 \\ 1 & \xi > 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.3:

Si consideri la variabile aleatoria di Pareto X, la cui funzione di partizione è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 - (\frac{a}{x})^b & x \geq a \end{cases}$$

con $a \geq 0$ e $b > 0$.
a) Verificare che $F_X(x)$ sia una funzione di ripartizione. Calcolare la densità di probabilità per X e graficare qualitativamente i casi ($a = 1$, $b = 1$) e ($a = 1$, $b = 2$).
b) Calcolare media e varianza di X. Verificare l'esistenza o meno di tutti i momenti della variabile aleatoria. Esiste la funzione generatrice dei momenti?
c) Sia $Y = \frac{1}{X}$ con X v.a. di Pareto avente ($a = 1$, $b = 1$). Calcolare la funzione di partizione e la densità di probabilità per Y. Di che v.a. si tratta?



Soluzione: La funzione $F_X(x)$ è definita tra $0 \leq F_X(x) \leq 1$, è monotona non decrescente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

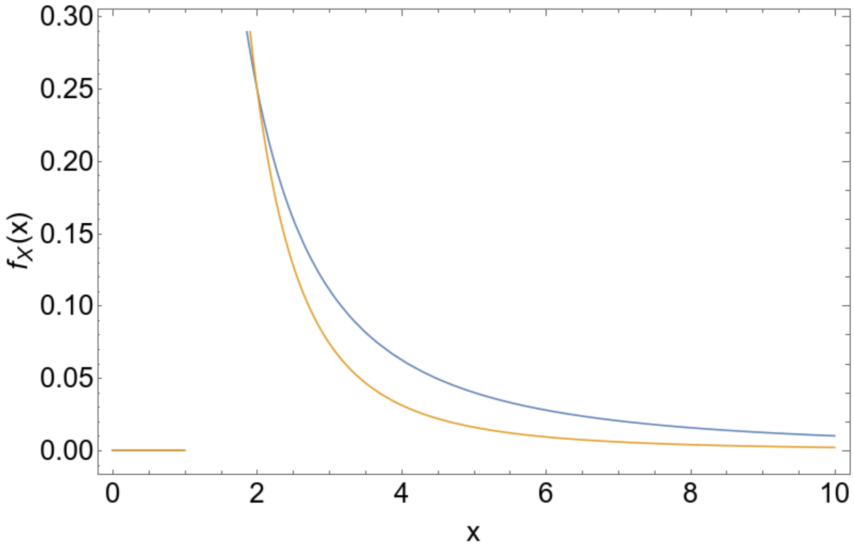
i suoi limiti (sinistro e destro, che possono essere considerati come normalizzazione) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$. Infine:

$$\Pr\{x_1 \leq X \leq X_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Quindi possiamo dichiarare che $F_X(x)$ ha tutte le proprietà per essere una funzione di partizione, che consente di stabilire la probabilità che la variabile aleatoria X assuma valori compresi in intervalli di tipo $(x_1, x_2]$ con $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ e $x_1 < x_2$.
La densità di probabilità $f_X(x)$ si trova facendo:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) \\ &= b\, a^b\, x^{-b-1} \\ &= \begin{cases} \frac{b\, a^b}{x^{b+1}} & x \geq a \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

Calcoliamo i casi con ($a = 1$, $b = 1$) in cui $f_X(x) = \frac{1}{x^2}$ e ($a = 1$, $b = 2$) in cui $f_X(x) = \frac{2}{x^3}$ per $x \geq a$.



b) Media:

$$\begin{aligned}
\mu &= E\{X\} \\
&= \int_a^\infty x\,\frac{b\,a^b}{x^{b+1}}dx \\
&= \int_a^\infty \frac{b\,a^b}{x^b}dx \\
&= b\,a^b\,\frac{x^{-b+1}}{-b+1}\bigg|_a^\infty \\
&\quad \exists \quad b>1 \\
&= \frac{b\,a^b\,a^{1-b}}{b-1}
\end{aligned}$$

Varianza:

$$\begin{aligned}
Var &= E\{X^2\} \\
&= \int_a^\infty x^2\,\frac{b\,a^b}{x^{b+1}}dx \\
&= \int_a^\infty \frac{b\,a^b}{x^{b-1}}dx \\
&= b\,a^b\,\frac{x^{-b+2}}{-b+2}\bigg|_a^\infty \\
&\quad \exists \quad b>2 \\
&= \frac{b\,a^2}{b-2}
\end{aligned}$$

Seguendo lo stesso schema il momento n-esimo esisterà solo per $b > n$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_n &= E\{X^n\} \\
&= \int_a^\infty x^n \, \frac{b\,a^b}{x^{b+1}} dx \\
&= \int_a^\infty \frac{b\,a^b}{x^{b-n+1}} dx \\
&= b\,a^b \, \frac{x^{n-b-1}}{n-b}\bigg|_a^\infty \\
& \quad \exists \quad b > n \\
&= \frac{b\,a^n}{b-n}
\end{aligned}$$

La funzione generatrice dei momenti di una v.a. X è definita come il valore atteso di e^{tX} dove questo è finito. Quindi nel nostro caso:

$$\begin{aligned}
E\left\{e^{tX}\right\} &= E\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tX)^m}{m!}\right\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E\{X^m\}}{m!} t^m
\end{aligned}$$

La funzione generatrice non esiste.

c) Siamo nel caso in cui $Y = \frac{1}{X}$ in cui la densità di probabilità è:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

calcoliamo $x(y) = \frac{1}{y}$ e di conseguenza:

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \left|\frac{dx}{dy}\right| = \begin{cases} 0 & \textit{altrove} \\ \cancel{y^2}\frac{1}{\cancel{y^2}} = 1 & 0 < y < 1 \end{cases}$$

La funzione di ripartizione:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \Pr\{Y \leq y\} \\
&= \Pr\left\{\frac{1}{X} \leq y\right\} \\
&= \Pr\left\{X \geq \frac{1}{y}\right\} \\
&= 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)
\end{aligned}$$

Quindi in definitiva:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y & 0 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

La variabile di Pareto descrive, ad esempio, la distribuzione del reddito in una popolazione, possiamo indicare con X il reddito e con a il reddito minimo. $F_X(x)$ è la % di popolazione che ha un reddito minore di x. Il caso in cui $b \to \infty$ corrisponde al caso del comunismo, in cui la distribuzione della ricchezza è piatta:

$$\lim_{b\to\infty} f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x > a \end{cases}$$

Per $b \gg 1$ siamo in una situazione dove abbiamo pochi ricchi e molti poveri.

Esercizio 3.4:

Sia X una v.a. gaussiana di media nulla e varianza σ^2; sia Y una v.a. definita troncando le code della X ossia imponendo che Y sia nulla per $|y| \geq a > 0$ e distribuita gaussianamente come la X per $|y| < a$.
a) Calcolare la densità di probabilità della v.a. Y e verificarne la normalizzazione.
b) Calcolare media , varianza, moda e mediana di Y.
c) sia $a = n$, $n \in \mathrm{N}$, dire se la successione Y_n tende in distribuzione ad una v.a. e, se esiste, identificarla. Ripetere il procedimento per la successione definita ponendo $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$.
d) Dire se la v.a. Y è riproducibile.

Soluzione: La densità di probabilità per la X sarebbe:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Troviamo la densità di probabilità per Y e contemporaneamente verifichiamone la normalizzazione:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & |y| > a \\ \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} & |y| \leq a \end{cases}$$

Normalizziamo:

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = 1$$

Se portiamo fuori la costante di normalizzazione siamo davanti alla densità di probabilità di X

$$\mathbf{K}\left[F_X(a) - F_X(-a)\right] = 1$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{F_X(a) - F_X(-a)}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{1 - 2F_X(-a)}$$

L'ultimo passaggio è possibile grazie al fatto che $F_X(a) = 1 - F_X(-a)$.

b) Media, moda e mediana sono nulle in quanto la v.a. gaussiana di partenza aveva media nulla. Calcoliamoci la varianza:

$$\begin{aligned}
Var &= E\left\{Y^2\right\} \\
&= \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-a}^{a} y^2\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy \\
\int_{-a}^{a} y^2\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy &= -y\sigma^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\Big|_{-a}^{a} + \int_{-a}^{a}\sigma^2\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy \\
&= -2\, a\, e^{-\frac{a^2}{2\,\sigma^2}} + \sigma^2\sqrt{2\pi}\sigma\left[F_X(a) - F_X(-a)\right] \\
&= \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-2a)e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\sigma^2 + \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sigma^2\sqrt{2\pi}\sigma\frac{1}{\mathbf{K}} \\
&= \sigma^2\left[1 - \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{\sigma}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right] \\
&\rightarrow_{\lim_{a\rightarrow\infty}} \sigma^2
\end{aligned}$$

c) Se $a_n = n$ con $n \in$ N i limiti dove X e Y differiscono si spostano al crescere di n. Questo implica che la differenza tra la v.a. Y e la v.a. X (si vede dalla normalizzazione) si riduce progressivamente. Quindi:

$$Y_n \rightarrow X$$

Se invece consideriamo $a =_n \frac{1}{n}$ con $n \in$ N allora possiamo ricalcolarci la varianza:

$$Var = \sigma^2\left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{a}{F_X(a) - F_X(-a)}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right]$$

dove dobbiamo valutare la parte dipendente da a nel caso in cui $a \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{a\rightarrow 0}\frac{a}{F_X(a) - F_X(-a)} &= \lim_{a\rightarrow 0}\frac{1}{f_X(a) - f_X(-a)} \\
&= \frac{1}{2f_X(0)} \\
&= \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Se sostituisco nella varianza ottengo:

$$\begin{aligned}
Var\{Y_n\} &= \sigma^2\left[1 - e^{-\frac{1}{n^2\,2\,\sigma^2}}\right] \\
&\rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0
\end{aligned}$$

d) Per riproducibilità si intende che la distribuzione della v.a. $Y_n = Y_1 + Y_2 + ..$, somma di due o più v.a., segue la stessa legge di distribuzione di X e di Y (in altre parole, la legge di distribuzione è chiusa sotto l'operazione di somma di due v.a. indipendenti). In questo caso dato che $a_1 \neq a_2$ implica che $f_{Y_1+Y_2}$ non sia uguale a f_Y. quindi non è riproducibile, anche se generalmente una gaussiana è una v.a. riproducibile.

Esercizio 3.5:

I transistor della ditta TS hanno un tempo di vita rappresentato dalla v.a. esponenziale ed è noto che ciascun componente dura in media 2 anni.
a) Calcolare la probabilità che uno di questi transistor funzioni per meno di 18 mesi.
b) Un transitor TS sta funzionando ininterrottamente da 2 anni. Qual è la probabilità che funzioni ancora per un altro anno?
c) Vengono collegati in serie 3 transistor TS. Qual è la probabilità che questo circuito funzioni per

almeno 2 anni? d) Nel circuito di una macchina industriale è inserito un transistor. Vi è inoltre un dispositivo che, non appena un transistor di rompe, lo sostituisce con uno nuovo fino ad un massimo di 4 sostituzioni. Se tutti gli altri componenti della macchina non sono soggetti a rottura, quanto tempo in media passerà prima che la macchina smetta di funzionare? Qual è inoltre la v.a. che rappresenta la durata della macchina appena descritta?

soluzione: X è una variabile aleatoria esponenziale la cui densità di probabilità è:

$$f_X(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

dove λ è il parametro e x è il valore associato alla v.a. X. La funzione di ripartizione è:

$$\begin{aligned} F_X(x,\lambda) &= \Pr\{X \leq x\} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\, x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Questo implica che stiamo guardando ad un processo che non ha memoria. Quindi, per prima cosa calcoliamoci il valore di aspettazione relativo al momento di ordine 1:

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \lambda \left[-\frac{x\, e^{-\lambda x}}{\lambda} \Bigg|_0^{\infty} + \lambda \int_0^{\infty} \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\, dx \right. \\ &= \lambda \left[\cancel{-\frac{x\, e^{-\lambda x}}{\lambda} \Bigg|_0^{\infty}} - \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \Bigg|_0^{\infty} \right. \\ &= \frac{1}{\lambda} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ora possiamo calcolarci la probabilità

$$\begin{aligned} \Pr\{< 1.5\,\mathrm{Yr}\} &= \Pr\left\{X \leq \frac{3}{2}\right\} \\ &= F_X\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= 1 - e^{-\frac{3}{2}\frac{1}{2}} \\ &= 0.528 \end{aligned}$$

b) In questo caso dobbiamo ricordarci il concetto di probabilità condizionata, un transistor in funzione da due anni è l'informazione che sappiamo con certezza:

$$\begin{aligned} \Pr\{X > 3 | X > 2\} &= \Pr\{X > (3-2)\} && \textit{Proprietà di Markov in assenza di memoria} \\ &= 1 - F_X(1) \\ &= 1 - 1 + e^{-\frac{1}{2}} \\ &= 0.607 \end{aligned}$$

c) In questo caso per non funzionare dobbiamo trovarci nel caso di intersezione dei tre eventi:

$$\begin{aligned} \Pr\{(X_1 > 2) \cap (X_2 > 2) \cap (X_3 > 2)\} &= \Pr\{(X > 2)^3\} \\ &= \left(1 - 1 + e^{-1}\right)^3 \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

d) Se il transistor si rompe e c'è la possibilità di sostituirlo 4 volte il suo tempo di vita medio sarà 4 volte.

$$
\begin{aligned}
Y &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \\
E\{Y\} &= \sum_{i=1}^{4} E\{X_i\} \\
&= \frac{4}{\lambda} \\
&= 8\,Yr
\end{aligned}
$$

Questi 4 eventi si possono considerare indipendenti e quindi la nuova variabile aleatoria ha come distribuzione la funzione Γ di Eulero.

Questa cosa si può dimostrare usando la funzione generatrice dei momenti. Prendiamo per esempio X_i con $i = 1...n$ una serie di v.a. esponenziali mutualmente indipendenti aventi densità di probabilità:

$$
f_{X_i}(x) = \alpha\, e^{-x\,\alpha} \qquad x > 0
$$

la funzione generatrice dei momento X_j sarà:

$$
\begin{aligned}
M_{X_j}(t) &= E\{e^{tX}\} \\
&= \int_0^{\infty} e^{tx}\, \alpha\, e^{-x\,\alpha}\, dx \\
&= \alpha \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - t)x}\, dx \\
&= \frac{\alpha}{\alpha - t} \\
&= \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Rifacciamo il conto per una somma di n variabili esponenziali indipendentie chiamiamo $X = \sum X_i$:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E\{e^{tX}\} \\
&= E\{e^{t \sum X_i}\} \\
&= E\{e^{tX_1}\, e^{tX_2} \, ... \, e^{tX_n}\} \\
&= E\{e^{tX_1}\}\, E\{e^{tX_2}\} \, ... \, E\{e^{tX_n}\} \\
&= M_{X_1}(t)\, M_{X_2}(t) \, ... \, M_{X_n}(t) \\
&= \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-1} ... \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-1} \\
&= \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-n}
\end{aligned}
$$

che è la funzione generatrice dei momenti di una v.a. Gamma di Eulero, prendiamo per esempio:

$$
f_Z(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\, \beta^{\alpha}}\, x^{\alpha - 1}\, e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad 0 < x < \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0
$$

dove

$$
\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha - 1}\, e^{-t}\, dt
$$

La funzione generatrice dei momenti di questa v.a. si trova nel modo seguente:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \int_0^\infty e^{tx}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x/\frac{\beta}{1-\beta t}}\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \Gamma(\alpha) \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right) \\ &= (1-\beta t)^{-\alpha} \end{aligned}$$

Esercizio 3.6:

La variabile aleatoria di Cauchy X è definita dalla seguente densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi\,(x^2+a^2)} \qquad a > 0 \qquad x, a \in \mathcal{R}$$

a) Verificare che la funzione densità di probabilità dia correttamente normalizzata.
b) Calcolare media, moda e mediana di tale distribuzione.
c) Calcolare la varianza di tale distribuzione.

Soluzione: Calcoliamo la normalizzazione per vedere se il fattore $\frac{1}{\pi}$ è corretto:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi\,(x^2+a^2)}\, dx &= 1 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx &= 1 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\, dy &= 1 \\ \frac{1}{\pi} \left[\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)\right] &= 1 \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

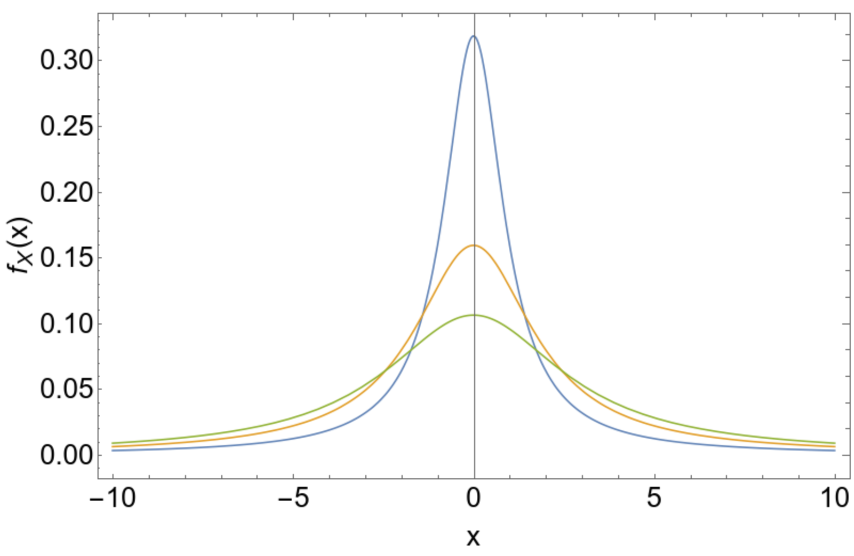


Figura 2: V.a. di Cauchy per 3 diversi valori di a: $a = 1, 2, 3$ (blu, gialla e verde)

b) Per la v.a. di Cauchy i momenti non sono definiti, ossia l'operatore di speranza matematica diverge:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \infty$$

In generale se non c'è un valore aggiunto o sottratto alla x, media, moda e mediana sono nulle.

c) Dato che i momenti non sono definiti nemmeno la varianza converge ad alcun valore.

Esercizio 3.7:

In un'urna sono contenute H palline di colore bianco e rosso di cui h sono palline bianche. Mediante il metodo dell'estrazione in blocco si estraggono n palline. Il numero di palline bianche estratte è una variabile aleatoria ipergeometrica, la cui distribuzione di probabilità è:

$$P_j = \frac{\binom{h}{j}\binom{H-h}{n-j}}{\binom{H}{n}}$$

Si aumenti il numero totale di palline, mantenendo costante la frazione di palline bianche sul totale.

$$p = \frac{h}{H} = const$$

Dire se la variabile "numero di palline bianche estratte su n" converge in distribuzione ad una variabile nota.

Soluzione: Posso definire i casi di insuccesso come:

$$q = \frac{H-h}{H}$$

e quindi posso riscrivere:

$$h = pH, \qquad H - h = qH$$

Quindi :

$$\begin{aligned}
P_j &= \frac{\binom{pH}{j}\binom{qH}{n-j}}{\binom{H}{n}} \\
&= \frac{pH!}{j!\,(pH-j)!}\,\frac{qH!}{(n-j)!(qH-n+j)!}\,\frac{n!(H-n)!}{H!} \\
&= \binom{n}{j}\frac{(pH)(pH-1)...(pH-j+1)\times(qH)(qH-1)...(qH-j+1)}{H(H-1)...(H-n+1)} \\
\lim_{H\to\infty} &= \binom{n}{j} p^j\, q^{n-j}
\end{aligned}$$

tende and una binomiale.