Esercitazioni di probabilità e statistica

Probabilità, spazio campione, compatibilità eventi,
s-dipendenza, s-indipendenza, σ-algebra,
teorema Bayes

Esercizio 1.1:

Quante sono le possibili colonne che si possono giocare al totocalcio?

Soluzione: I risultati utili sono {1,X,2} e possono essere giocate su $k = 13$ caselle diverse, si tratta quindi di una Disposizione con Rimessa. Si hanno n possibilità per scegliere il primo componente, n per il secondo, altrettante per il terzo e così via, sino al k-esimo che completa la configurazione. Il numero cercato è pertanto:

$$D^r_{n,k} = n^k = 3^{13} = 1594323$$

La vincita è una sola di queste disposizioni, quindi:

$$\Pr\{V\} = \frac{1}{3^{13}} \simeq 6.3 \times 10^{-7}$$

Esercizio 1.2:

Un elettricista deve montare un'insegna luminosa di una ditta. Egli deve collocare le 4 lettere luminose "A" "E" "S" "S" , ma non ricorda il nome della ditta. Quante sono le probabilità che ha di sbagliare?

Soluzione: Le possibili combinazioni in cui si possono comporre le lettere sono detti Raggruppamenti:

$$R_{n,k} = \frac{n!}{\prod_i^m (k_i!)} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Quindi, dal momento che il nome del negozio giusto è uno solo:

$$\Pr\{S\} = \frac{11}{12} = 92\%$$

Esercizio 1.3:

Nel campionato di calcio di serie A (20 squadre) le ultime 4 vengono retrocesse in serie B. Quante possibili quaterne di squadre retrocesse ci sono?

Soluzione: In questo caso dobbiamo pensare che non si possono ripetere gli elementi, il numero di posti è inferiore al numero di elementi, quindi il numero di Combinazioni:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} = 4845$$

Esercizio 1.4:

In quanti modi si possono disporre i primi 3 classificati in una gara di 10 concorrenti?

Soluzione: Definiamo chi sono i posti (k) e gli elementi (n)
n=10
k= 3
Quindi essendo una disposizione:

$$D_{n,k} = \frac{10!}{7!} = 720$$

Esercizio 1.5:

Quanti anagrammi si possono fare della parola "BUONGIORNO" anche senza significato?

Soluzione: In analogia con l'esercizio 2 si parla di Raggruppamento, contiamo quindi le lettere che ricorrono più volte:
"O" 3 volte
"N" 2 volte
Quindi:

$$R_{n,k} = \frac{10!}{2!\,3!} = 302400$$

Esercizio 1.6:

Nel gioco del Poker vengono servite 5 carte da un mazzo di 32 (dal 7 all'asso per ogni seme)
a) In quanti modi diversi possono essere servite le 5 carte ad un giocatore?
b) In quanti modi diversi può essere servito un poker d'assi?
c) In quanti modi può essere servito un poker qualsiasi?
d) Quale è la probabilità di avere un poker d'assi servito?

Soluzione: a) Ho $n = 32$ carte a disposizione e voglio sapere in quanti modi possibili ne posso servire $k = 5$ ad un giocatore, sto parlando di una Combinazione senza Rimessa, quindi:

$$C_{n,k} = \binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,27!} = 201376$$

b) Per avere un poker devo avere $k' = 4$ carte dello stesso valore, quindi sto calcolando le combinazioni possibili dell'ultmia carta che mi rimane da assegnare sulle $n - n' = 28$ totali che sono rimaste:

$$C_{(n-n'),(k-k')} = \binom{28}{1} = 28$$

Posso anche pensare di ottenere le $k' = 4$ carte per il poker da un mazzo composto da $n' = 4$ carte e l'ultima da un mazzo composto da $n - n' = 28$ carte:

$$C_{n',k'}\, C_{(n-n'),(k-k')} = \binom{4}{4}\binom{28}{1} = 28$$

c) Per avere servito un poker qualsiasi mi basta pensare di pescare semplicemente 8 possibili poker:

$$28 * 8 = 224$$

d) La probabilità di avere un poker d'assi servito non è altro che il numero di modi di avere un poker d'assi servito normalizzato sul numero totale di modi di distribuire le 5 carte:

$$\Pr\{poker\, A\, servito\} = \frac{C_{n',k'}\, C_{(n-n'),(k-k')}}{C_{n,k}} = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = \frac{1}{7192} = 1.39 \times 10^{-4}$$

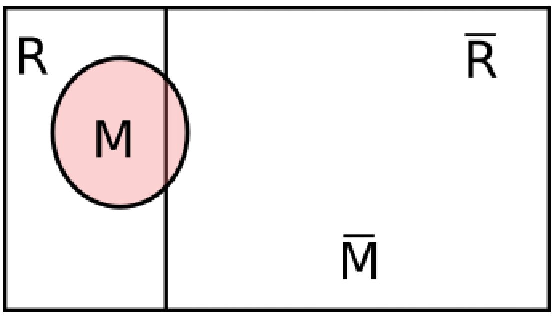
E per il poker servito:

$$\Pr\{poker\, servito\} = 8 * (1.39 \times 10^{-4}) = 1.11 \times 10^{-3}$$

Esercizio 1.7:

Una malattia colpisce la popolazione di una certa regione dove i soggetti a rischio sono il 15 %. Si sa inoltre che il tasso di incidenza sulla popolazione a rischio è 0.1 mentre il tasso di incidenza sulla popolazione non a rischio è 0.5 %.
a) Calcolare la probabilità che un individuo scelto a caso abbia la malattia.
b) Qual è la probabilità che, se una persona è malata, questa appartenga alla categoria soggetti a rischio?
c) Qual è la probabilità che, se una persona è sana, questa appartenga alla categoria soggetti a rischio?
Viene predisposto un test medico per accertarsi della presenza della malattia prima dei sintomi. Il test risulta positivo sulle persone malate, qualsiasi sia la loro categoria di appartenenza, con probabilità del 0.99 su persone sane e con probabilità 0.5 %.
d) Qual è la probabilità di essere malati sapendo di essere risultati positivi al test?
e) Qual è la probabilità di essere malati sapendo di essere risultati negativi al test?

Soluzione: In questo caso dobbiamo pensare in termini di Probabilità Condizionata.
$\Pr\{R\} = 0.15$
$\Pr\{M|R\} = 0.1$
$\Pr\{M|\overline{R}\} = 0.005$
Identifichiamo lo spazio campione:



a) L'intersezione tra lo spazio dell'evento malattia contratta (M) e lo spazio campione (S) può essere scritto nel seguente modo:

$$M \cap S = M \cap (R \cup \overline{R}) = (M \cap R) \cup (M \cap \overline{R})$$

Dal momento che abbiamo uno spazio campione (S) partizionato in due sottospazi R e $\overline{R}$ possiamo scrivere che:

$$\Pr\{M\} = \Pr\{M \cap R\} + \Pr\{M \cap \overline{R}\} \tag{1}$$

Dove ogni pezzo del lato destro dell'equazione è una Probabilità Composta (vedere probabilità subordinata, composta: $\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \times \Pr\{B|A\} = \Pr\{B\} \times \Pr\{A|B\}$). Quindi è possibili riscrivere la Eq. (1) in questo modo:

$$\begin{aligned} \Pr\{M\} &= \Pr\{M|R\} \times \Pr\{R\} + \Pr\{M|\overline{R}\} \times \Pr\{\overline{R}\} \\ &= 0.1 \cdot 0.15 + 0.005 \cdot 0.85 \\ &= 0.0192 \\ &= 1.92\% \end{aligned}$$

b) Basta applicare il nuovamente la Probabilità Composta:

$$\begin{aligned} \Pr\{R|M\} &= \frac{\Pr\{M|R\} \times \Pr\{R\}}{\Pr\{M\}} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.15}{0.00192} \\ &= 0.781 \\ &= 78.1\% \end{aligned}$$

c) Stessa cosa cambiando la categoria di appartenenza da M a $\overline{M}$:

$$\begin{aligned}
\Pr\{R|\overline{M}\} &= \frac{\Pr\{\overline{M}|R\} \times \Pr\{R\}}{\Pr\{\overline{M}\}} \\
&= \frac{0.9 \cdot 0.15}{1 - 0.00192} \\
&= 0.138 \\
&= 13.8\%
\end{aligned}$$

Osservazione: la somma della probabilità di una persona malata appartenente alla categoria soggetti a rischio più la probabilità che una persona sana sia a rischio non è uguale a uno:

$$\Pr\{R|\overline{M}\} + \Pr\{R|M\} \neq 1$$

d) Come fatto in precedenza scriviamo le probabilità condizionate che il testo fornisce:
$\Pr\{T|M\} = 0.99$
$\Pr\{T|\overline{M}\} = 0.005$
Quindi la probabilità di essere malati essendo risultati positivi al test si ricava facilmente usando il teorema di Bayes:

$$\begin{aligned}
\Pr\{M|T\} &= \frac{\Pr\{M_i\} \times \Pr\{T|M_i\}}{\sum_{i=1}^{n} \Pr\{M_i\} \times \Pr\{T|M_i\}} \\
&= \frac{\Pr\{M\} \times \Pr\{T|M\}}{\Pr\{M\} \times \Pr\{T|M\} + \Pr\{\overline{M}\} \times \Pr\{T|\overline{M}\}} \\
&= \frac{0.99 \cdot 0.0192}{0.99 \cdot 0.0192 + 0.005 \cdot (1 - 0.00192)} \\
&= 0.795 \\
&= 79.5\%
\end{aligned}$$

e) Stesso procedimento del punto precedente cambiando lo stato del test di riferimento:

$$\begin{aligned}
\Pr\{M|\overline{T}\} &= \frac{\Pr\{M_i\} \times \Pr\{\overline{T}|M_i\}}{\sum_{i=1}^{n} \Pr\{M_i\} \times \Pr\{\overline{T}|M_i\}} \\
&= \frac{\Pr\{M\} \times \Pr\{\overline{T}|M\}}{\Pr\{M\} \times \Pr\{\overline{T}|M\} + \Pr\{\overline{M}\} \times \Pr\{\overline{T}|\overline{M}\}} \\
&= \frac{0.01 \cdot 0.0192}{0.01 \cdot 0.0192 + 0.995 \cdot (1 - 0.00192)} \\
&= 0.0002 \\
&= 0.02\%
\end{aligned}$$

In sostanza l'applicazione del teorema di Bayes ci sta dicendo che abbiamo dei casi di Falsi Negativi e Falsi Positivi.

Esercizio 1.8:

1.8. *Da un mazzo di 52 carte se ne sceglie una a caso. Quanto vale la probabilità di estrarre una figura o una carta di fiori? E quella di estrarre una figura e un fiori?*

Soluzione. L'evento {estrazione di una figura} non influisce sulla probabilità dell'evento {estrazione di un fiori}, per cui essi sono statisticamente indipendenti. Ne segue:

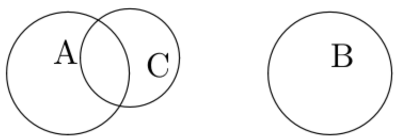
$$P\{\text{figura} \cup \text{fiori}\} = P\{\text{figura}\} + P\{\text{fiori}\} - P\{\text{figura} \cap \text{fiori}\} = \frac{12}{52} + \frac{13}{52} - \frac{3}{52} = \boxed{\frac{11}{26}}$$

$$P\{\text{figura} \cap \text{fiori}\} = P\{\text{figura}\} \cdot \mathbb{P}\{\text{fiori}\} = \frac{12}{52} \cdot \frac{13}{52} = \boxed{\frac{3}{52}}.$$

Esercizio 1.9:

1.9. *Se A e C sono eventi incompatibili con B, allora $P(A \cup B|C) = P(A|C)$. Vero o falso?*

Risposta: $\boxed{\text{Vero}}$, perché:



$$P(A \cup B|C) = \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = P(A|C).$$

Esercizio 1.10:

1.10 *Nel lancio ripetuto di due dadi non truccati, la somma dei risultati è un numero pari. Quanto vale la probabilità di aver totalizzato 8 ?*

Risposta: La probabilità che la somma sia 8 è

$$P\{8\} = P\{(6+2) \cup (5+3) \cup (4+4) \cup (3+5) \cup (2+6)\} = \frac{5}{36}.$$

Sapendo che è uscito un numero pari, si ha invece

$$P\{8|\text{pari}\} = \frac{P\{8 \cap \text{pari}\}}{P\{\text{pari}\}} = \frac{P\{8\}}{0.5} = \boxed{\frac{5}{18}}.$$

Esercizio 1.11:

Un lotto di componenti meccanici contiene un numero imprecisato di elementi, di cui alcuni son difettosi. Supponiamo di procedere ad estrazione senza rimessa e sia "A" l'evento "difettoso" alla prima estrazione, "B" l'evento difettoso alla seconda estrazione. Sapendo che:
$\Pr\{A\} = 0.1$
$\Pr\{B|A\} = 0.09091$
$\Pr\{B|\overline{A}\} = 0.10101$
qualcuno sostiene che $\Pr\{A|B\} = \Pr\{B|A\}$. Ha ragione?
Dimostrare la relazione in un caso generico.

Soluzione:: La prima condizione da verificare è la probabilità di avere una elemento difettoso in seconda estrazione:

$$\begin{aligned}\Pr\{B\} &= \Pr\{B|A\} \times \Pr\{A\} + \Pr\{B|\overline{A}\} \times \Pr\{\overline{A}\}\\ &= 0.09091 \cdot 0.1 + 0.10101 \cdot 0.9 = 0.1\\ &= \Pr\{A\}\end{aligned}$$

Dato che $\Pr\{B\} = \Pr\{A\}$ si può tranquillamente dire che:

$$\begin{gathered}\Pr\{B|A\} \times \Pr\{A\} + \Pr\{B|\overline{A}\} \times \Pr\{\overline{A}\} = \Pr\{A|B\} \times \Pr\{B\} + \Pr\{A|\overline{B}\} \times \Pr\{\overline{B}\}\\ \Pr\{A|B\} = \Pr\{B|A\}\end{gathered}$$

Per generalizzare il concetto consideriamo ora un'urna con d elementi difettosi e b elementi buoni, la probabilità di avere un elemento difettoso alla prima estrazione sarà:

$$\Pr\{A\} = \frac{d}{d+b}$$

mentre la probabilità di avere un elemento difettoso alla seconda estrazione condizionata dall'estrazione di un elemento difettoso alla prima estrazione sarà:

$$\Pr\{B|A\} = \frac{d-1}{d+b-1}$$

Ovviamente la probabilità di avere un elemento difettoso alla seconda estrazione dopo aver avuto un elemento buono in prima estrazione:

$$\Pr\{B|\overline{A}\} = \frac{d}{d+b-1}$$

Quindi riscrivendo la regola di Bayes:

$$\begin{aligned}\Pr\{B\} &= \Pr\{B|A\} \times \Pr\{A\} + \Pr\{B|\overline{A}\} \times \Pr\{\overline{A}\}\\ &= \frac{d-1}{d+b-1} \cdot \frac{d}{d+b} + \frac{d}{d+b-1} \cdot \frac{b}{d+b}\\ &= \frac{d}{d+b}\\ &= \Pr\{A\}\end{aligned}$$

Esercizio 1.12:

Con quale probabilità tra un gruppo di n persone ce ne sono 2 che festeggiano il compleanno lo stesso giorno? Di quanti componenti deve essere composto il gruppo per avere una probabilità del 50 %?

Soluzione: Il ragionamento è questo: data una qualunque persona del gruppo (indipendentemente dalla data del suo compleanno), vi sono 364 casi su 365 in cui il compleanno di una seconda persona avvenga in un giorno diverso; se si considera una terza persona, ci sono 363 casi su 365 in cui compie gli anni in un giorno diverso dalle prime due persone e via dicendo. In termini matematici stiamo dicendo:

$$1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \ldots \cdot \frac{365-n+1}{365} = \frac{364!}{365^{p-1}(365-p)!}$$

La probabilità è quindi:

$$\Pr E = 1 - \frac{364!}{365^{p-1}(365-p)!} \tag{2}$$

Per avere una probabilità del 50 % devo risolvere l'equazione associata:

$$\frac{364!}{365^{p-1}(365-p)!} = 0.5$$
$$p \simeq 23$$

Esercizio 1.13:

Agli eventi "A" e "B" sono associate le seguenti probabilità

$$Pr\{A\} = 1/3; \qquad \Pr\{A|B\} = 1/4; \qquad \Pr\{B|A\} = 1/5$$

si calcoli la probabilità di B.

Soluzione: Usando la regola della Probabilità Composta:

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \times \Pr\{B|A\} = \Pr\{B\} \times \Pr\{A|B\}$$
$$\Pr\{B\} = \frac{\Pr\{A\} \times \Pr\{B|A\}}{\Pr\{A|B\}} = \frac{4}{15}$$

Esercizio 1.14:

Gli eventi "A" , "B" e "C" sono tali che "A" è incompatibile sia con "B" che con "C", mentre "B" e "C" sono tra loro s-indipendenti. Gli eventi "A" , "B" e "C" hanno probabilità

$$\Pr\{A\} = 0.1; \qquad \Pr\{B\} = 0.2; \qquad \Pr\{C\} = 0.3$$

Si calcolino le seguenti probabilità:
a) $\Pr\{B \cup C\}$
b) $\Pr\{A \cup B \cup C\}$
c) $\Pr\{A|B \cup C\}$
d) $\Pr\{B \cap C|B \cup C\}$

Soluzione: Consideriamo le regole che ci possono servire:
eventi incompatibili:

$$\Pr\{E_1 \cup E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} \tag{3}$$

eventi compatibili:

$$\Pr\{E_1 \cup E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 \cap E_2\} \tag{4}$$

eventi s-indipendenti:

$$\Pr\{E_1 \cap E_2\} = \Pr\{E_1\} \times \Pr\{E_2\} \tag{5}$$

eventi s-dipendenti:

$$\Pr\{E_1 \cap E_2\} = \Pr\{E_1\} \times \Pr\{E_1|E_2\} \tag{6}$$

Quindi :
a) la probabilità di B unito a C

$$\begin{aligned}\Pr\{B \cup C\} &= \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{B \cap C\} \\ &= 0.2 + 0.3 - 0.06 \\ &= 0.44\end{aligned}$$

b) la probabilità di A unito B unito C si può considerare come:

$$\begin{aligned}\Pr\{A \cup B \cup C\} &= Pr\{A \cup (B \cup C)\} \\ &= \Pr\{A\} + \Pr\{B \cup C\} \\ &= 0.1 + 0.44 \\ &= 0.54\end{aligned}$$

c) la probabilità di A conosciuto B unito C, applicando il teorema della Probabilità Condizionata, risulta:

$$\begin{aligned}\Pr\{A|B \cup C\} &= \frac{\Pr\{A \cap (B \cup C)\}}{\Pr\{B \cup C\}} \\ &= 0\end{aligned}$$

d) Infine la probabilità di B intersezione C conoscendo B unione C si ricava come nel caso precedente usando il Teorema della Probabilità Condizionata:

$$\begin{aligned}\Pr\{B \cap C|B \cup C\} &= \frac{\Pr\{(B \cap C) \cap (B \cup C)\}}{\Pr\{B \cup C\}} \\ &= \frac{\Pr\{B \cup C\}}{\Pr\{B \cup C\}} \times \frac{\Pr\{B \cap C\}}{\Pr\{B \cup C\}} \\ &= \frac{0.06}{0.44} \\ &= 0.136\end{aligned}$$

Esercizio 1.15:

A e B lanciano un dado una volta a testa, vince chi realizza il numero più alto. In caso di parità lanciano una moneta, A vince se esce “testa”, B vince se esce “croce”.
a) Qual è la probabilità che B vinca senza lanciare la moneta?
b) Qual è la probabilità che B vinca?
c) Qual è la probabilità che A perda se ottiene 4 nel lancio del dado?

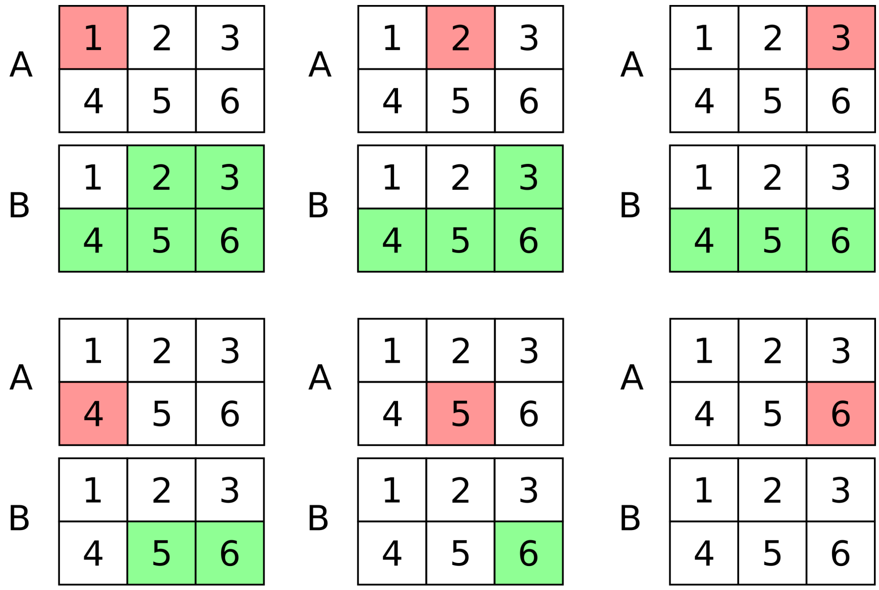
Soluzione: a) La soluzione si trova facendo l’intersezione dei possibili risultati che danno la vittoria a B:

Le intersezioni tra le possibilità rappresentate nella figura precedente sono:

$$[1 \cap (> 1)],\ [2 \cap (> 2)],\ [3 \cap (> 3)],\ [4 \cap (> 4)],\ [5 \cap (> 5)]$$

La probabilità dell’unione di questi eventi è:

$$\begin{aligned}&\Pr\{[1 \cap (> 1)] \cup [2 \cap (> 2)] \cup [3 \cap (> 3)] \cup [4 \cap (> 4)] \cup [5 \cap (> 5)]\} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{15}{36}\end{aligned}$$



b) In questo caso alla probabilità di vittoria trovata nel punto a, dobbiamo sommare la probabilità che dopo un pareggio B vinca ottenendo croce dal lancio della moneta:

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{[1\cap(>1)]\cup[2\cap(>2)]\cup[3\cap(>3)]\cup[4\cap(>4)]\cup[5\cap(>5)]\}+\\
&+\Pr\{[(1\cap 1)\cup(2\cap 2)\cup(3\cap 3)\cup(4\cap 4)\cup(5\cap 5)\cup(6\cap 6)]\cap(croce)\}=\\
&=\frac{15}{36}+\frac{6}{36}\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

c) In questo caso B può vincere in 2 modi, fare un punteggio con i dadi >4 oppure fare 4 e vincere lanciando croce:

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{(>4)\}+\Pr\{(4\cap croce)\}=\\
&=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.16:

Supponiamo che un lotto A contenga 10 pezzi conformi su 15 e che un lotto B ne contenga invece 1000 su un totale di 1500. Da entrambi i lotti vengono estratti senza rimessa 5 pezzi per il collaudo.
a) Si calcoli la probabilità di trovare 2 pezzi non conformi dal lotto A e due pezzi non conformi dal lotto B. b) Ricalcolare le probabilità nel caso in cui i 5 oggetti vengano estratti con rimessa.

Soluzione: a) Sappiamo che ci sono $n'=5$ su $n=15$ oggetti difettosi nel lotto A e $n'=500$ nel lotto B su un totale di $n=1500$, la probabilità di estrarre $k'=2$ oggetti difettosi su $k=5$ estrazioni è quindi data da:

$$\Pr\{2A\}=\frac{C_{n',k'}\,C_{(n-n'),(k-k')}}{C_{n,k}}=\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{3}}{\binom{15}{5}}=0.400$$

$$\Pr\{2B\}=\frac{C_{n',k'}\,C_{(n-n'),(k-k')}}{C_{n,k}}=\frac{\binom{500}{2}\binom{1000}{3}}{\binom{1500}{5}}=0.330$$

b) In questo caso basta usare la formula della Combinazione con Rimessa:

$$\begin{aligned}\Pr\{2A\} &= \frac{C^r_{n',k'}\, C^r_{(n-n'),(k-k')}}{C^r_{n,k}} \\ &= \frac{\binom{n'+k'-1}{k'}\binom{(n-n')+(k-k')-1}{k-k'}}{\binom{n+k-1}{k}} \\ &= 0.283\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr\{2B\} &= \frac{C^r_{n',k'}\, C^r_{(n-n'),(k-k')}}{C^r_{n,k}} \\ &= \frac{\binom{n'+k'-1}{k'}\binom{(n-n')+(k-k')-1}{k-k'}}{\binom{n+k-1}{k}} \\ &= 0.328\end{aligned}$$

Esercizio 1.17:

Calcolare la probabilità di ottenere 5 come risultato della somma dei punteggi sulle facce di due dadi lanciati una sola volta simultaneamente.
a) E' più probabile che esca un 3 o un 9 ?

Soluzione: Per ottenere un 5 abbiamo a disposizione un numero limitato di combinazioni dei due dadi: 4+1, 3+2, 2+3, 1+4. Quindi scrivendo la σ-algebra relativa agli eventi considerati:

$$G_5 = (E_1 \cap D_4) \cup (E_2 \cap D_3) \cup (E_3 \cap D_2) \cup (E_4 \cap D_1)$$

Quindi possiamo ragionare come nell'esercizio 1.17 ossia facendo l'intersezione degli eventi oppure possiamo usare la formula della Probabilità Composta: $\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A|B\} \Pr\{B\}$

$$\begin{aligned}\Pr\{G_5\} = &\Pr\{E_1|D_4\} \times \Pr\{D_4\} + \Pr\{E_2|D_3\} \times \Pr\{D_3\} \\ &+ \Pr\{E_3|D_2\} \times \Pr\{D_2\} + \Pr\{E_4|D_1\} \times \Pr\{D_1\}\end{aligned}$$

che nel nostro caso si riduce esattamente al caso dell'esercizio 1.17 in quanto vale la s-indipendenza (ossia il risultato del lancio del secondo dado non può influenzare il risultato del lancio del primo dado):

$$\Pr\{E_i|D_i\} = \Pr\{E_i\}$$

Quindi:

$$\Pr\{G_5\} = \frac{1}{36} \cdot 4$$

a) La somma dei risultati del lancio di due dati si distribuisce nel seguente modo: Si capisce se si considera quante sono le combinazioni che possono dare il risultato 7 (ossia 6) e quante il risultato 2 (solamente 1). Quindi:

$$\begin{aligned}\Pr\{G_3\} &= \Pr\{E_1 \cap D_2\} \cup \Pr\{E_2 \cap D_1\} = \frac{2}{36} \\ \Pr\{G_9\} &= (\Pr\{E_6 \cap D_3\} \cdot 2) \cup (\Pr\{E_5 \cap D_4\} \cdot 2) = \frac{4}{36}\end{aligned}$$

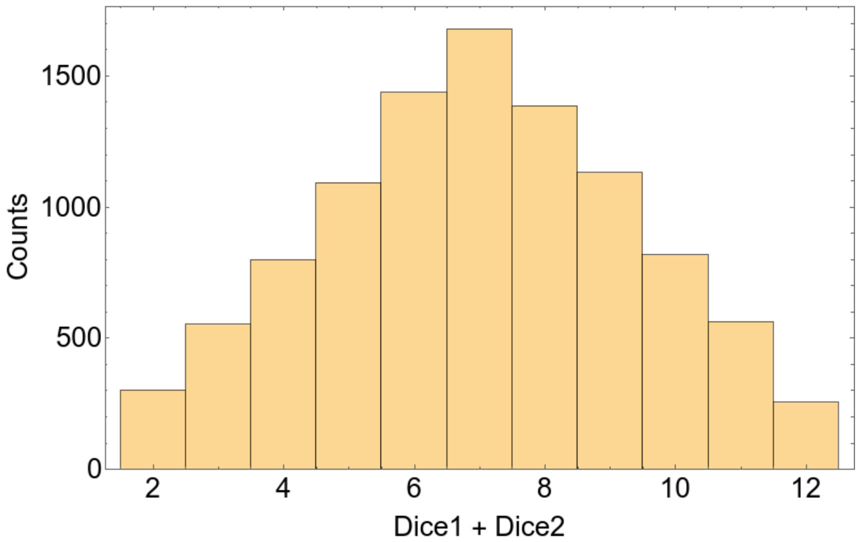


Figura 1: Distribuzione della somma dei valori relativa a 10000 lanci di due dadi non truccati.

Esercizio 1.18:

Un amministrativo inefficiente distribuisce in modo del tutto casuale tre letter in tre buste già indirizzate. Calcolare la probabilità che:
a) tutte le lettere arrivino a destinazione giusta
b) almeno una lettera arrivi a destinazione

Soluzione: Tre lettere in tre buste a caso, la probabilità di consegnare correttamente una lettera è condizionata dal fatto di aver consegnato correttamente le altre, questo vuol dire calcolare la probabilità:

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1 \cap A_2 \cap A3\} &= \Pr\{A_1 \cap A_2\} \\
&= \Pr\{A_1 | A_2\} \times \Pr\{A_2\} \qquad \textit{sono s-dipendenti} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

b) Almeno una lettera significa che l'unione degli eventi deve avere almeno un elemento valido:

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1 \cup A_2 \cup A3\} &= \Pr\{A_1\} + \Pr\{A_2\} + \Pr\{A_3\} + \\
&- \Pr\{A_1 \cap A_2\} - \Pr\{A_1 \cap A_3\} - \Pr\{A_2 \cap A_3\} + \\
&+ \Pr\{A_1 \cap A_2 \cap A3\} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

In modo grafico:

1	2	3
A1	A2	A3
A1	A3	A2
A2	A3	A1
A2	A1	A3
A3	A1	A2
A3	A2	A3

Esercizio 1.19:

Un'urna contiene 4 palline bianche e 2 palline nere; un'altra contiene 3 aplline bianche e 5 palline nere. Si estragga una pallina da ciascuna urna. Determinare la prob abilità che siano:
a) entrambe nere
b) entrambe bianche
c) una bianca e una nera

Soluzione: La probabilità che si estraggano due palline nere dalle due urne è la probabilità dell'intersezione degli eventi:

$$\begin{aligned}\Pr\{N_1 \cap N_2\} &= \Pr\{N_1\} \times \Pr\{N_2|N_1\} \rightarrow \textit{sono s-indipendenti}\\ &= \Pr\{N_1\} \times \Pr\{N_2\}\\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{8}\\ &= \frac{5}{24}\\ &\simeq 21\%\end{aligned}$$

b) Per il caso di estrazione di due bianche cambiano solo i numeri da mettere nella equazione precedente:

$$\begin{aligned}\Pr\{B_1 \cap B_2\} &= \Pr\{B_1\} \times \Pr\{B_2|B_1\} \rightarrow \textit{sono s-indipendenti}\\ &= \Pr\{B_1\} \times \Pr\{B_2\}\\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8}\\ &= \frac{3}{12}\\ &\simeq 25\%\end{aligned}$$

c) Infine il caso in cui si verifichi l'estrazione di una pallina bianca e una pallina nera è l'unione delle intersezioni dei due eventi, ossia:

$$\begin{aligned}\Pr\{(N_1 \cap B_2) \cup (N_2 \cap B_1)\} &= \Pr\{N_1\} \times \Pr\{B_2|N_1\} + \Pr\{N_2\} \times \Pr\{B_1|N_2\} \rightarrow \textit{sono s-indipendenti}\\ &= \Pr\{N_1\} \times \Pr\{B_2\} + \Pr\{N_2\} \times \Pr\{B_1\}\\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}\\ &\simeq 54\%\end{aligned}$$

Esercizio 1.20:

I componenti prodotti da una certa ditta possono presentare due tipi di difetti, con percentuali del 3% e del 7%. I due tipi di difettosità si possono produrre in momenti diversi del processo per cui si può assumere la s-indipendenza dei difetti.
a) Calcolare la probabilità che un componente presenti entrambi i difetti.
b) Calcolare la probabilità che un componente sia difettoso.
c) Calcolare la probabilità che il componente presenti il primo difetto sapendo che è difettoso.
d) Calcolare la probabilità che vi sia un solo difetto sapendo che il prodotto è difettoso.

Soluzione: La rappresentazione della s-indipendenza in uno spazio campione è la seguente:

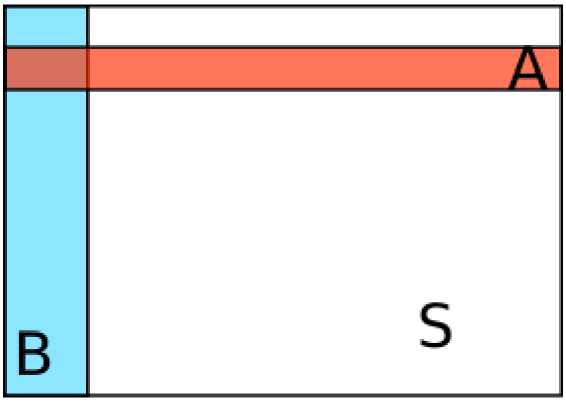


Figura 2: Spazio campione in cui l'evento A (3% di possibile difetto) e l'evento B (7% di possibile difetto) sono s-indipendenti.

a) La probabilità di avere un componente con entrambi i difetti è:

$$\begin{aligned}\Pr\{A \cap B\} &= \Pr\{A\} \times \Pr\{B\} \\ &= 0.21\%\end{aligned}$$

b) La probabilità che un componente abbia un difetto invece si scrive come l'unine dei due eventi non incompatibili:

$$\begin{aligned}\Pr\{A \cup B\} &= \Pr\{A\} \times \Pr\{B\} - \Pr\{A \cap B\} \\ &= 9.79\%\end{aligned}$$

Nota:
Se fossero stati incompatibili allora la formula di unione di due ev enti incompatibili si ridurrebbe a:

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} \times \Pr\{B\}$$

In alternativa si può risolvere il punto (b) anche utilizzando la legge di "de Morgan":

$$\begin{aligned}\Pr\{A \cup B\} &= \Pr\{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}\} \\ &= 1 - \Pr\{\overline{A} \cap \overline{B}\} \\ &= 1 - \Pr\{A\} \times \Pr\{B\} \\ &= 0.979 \\ &= 9.79\%\end{aligned}$$

c) In questo caso stiamo parlando di probabilità condizionata quindi:

$$\begin{aligned}
\Pr\{A|diff\} &= \Pr\{A|(A\cup B)\}\\
&= \frac{\Pr\{A\cap(A\cup B)\}}{\Pr\{A\cup B\}}\\
&= \frac{\Pr\{A\}}{\Pr\{A\cup B\}}\\
&= \frac{0.03}{0.0979}\\
&= 30.6\%
\end{aligned}$$

d) Infine la probabilità che vi sia un solo difetto sapendo che il prodotto è difettoso è la somma dei possibili casi che si possono presentare:

$$\begin{aligned}
&\Pr\{(A\cap\overline{B})|(A\cup B)\}+\Pr\{(\overline{A}\cap B)|(A\cup B)\} =\\
&= \frac{\Pr\{(A\cap\overline{B})\cap(A\cup B)\}+\Pr\{(\overline{A}\cap B)\cup(A\cup B)\}}{\Pr\{A\cup B\}}\\
&= \frac{\Pr\{A\cap\overline{B}\}+\Pr\{\overline{A}\cap B\}}{\Pr\{A\cup B\}}\\
&= \frac{\Pr A\times(1-\Pr\{B\})+\Pr B\times(1-\Pr\{A\})}{\Pr\{A\cup B\}}\\
&= \frac{0.03\cdot 0.93+0.07\cdot 0.97}{0.0979}\\
&= 0.979\\
&= 97.9\%
\end{aligned}$$

Esercizio 1.21:

Un giocatore punta in numeri “1”, “2”, “3” al gioco del lotto. Per aiutare la fortuna, nottetempo, inserisce nell’urna tre palline supplementari con i numeri “1”, “2”, “3”. Nel gioco del lotto si effettuano 5 estrazioni.
a) Quanto vale la probabilità di fare il terno?
b) Qual è la probabilità che il trucco venga scoperto?

Soluzione: Valutiamo quanto vale la probabilità di fare un terno (la situazione è la medesima che abbiamo visto per il poker servito)

$$\begin{aligned}
\Pr\{\text{terno}\} &= \frac{\binom{3}{3}\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}\\
&= 8.51\cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

Nel caso sotto analisi, tuttavia, l’urna è stata truccata, questo andrà ad impattare sull’estrazione dei numeri che possono essere estratti più di una volta e sul numero totale di palline che ci sono nell’urna:

$$\begin{aligned}
\Pr\{\text{terno truccato}\} &= \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{87}{2}}{\binom{93}{5}}\\
&= 5.76\cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

b) L’unico modo in cui il trucco può essere scoperto è che vengano estratte due palline con lo stesso valore, questo vale per ognuna delle palline che il giocatore ha inserito nell’urna, chiamiamo l’evento in cui vengono estratte due palline uguali A_i:

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1\} &= \Pr\{A_2\} = \Pr\{A_3\} \\
&= \frac{\binom{2}{2}\binom{91}{3}}{\binom{93}{5}} \\
&= 2.34 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

Può accadere anche che vengano estratte 2 palline 2 volte (e.g. 2 volte "1" e due volte "2"):

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1 \cap A_2\} &= \Pr\{A_1 \cap A_3\} = \Pr\{A_2 \cap A_3\} \\
&= \frac{\binom{4}{4}\binom{89}{1}}{\binom{93}{5}} \\
&= 1.71 \cdot 10^{-6}
\end{aligned}$$

Mettendo quindi insieme tutte le probabilità:

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1 \cup A_2 \cup A_3\} &= \Pr\{A_1\} + \Pr\{A_2\} + \Pr\{A_3\} + \\
&- Pr\{A_1 \cap A_2\} - Pr\{A_1 \cap A_3\} - Pr\{A_2 \cap A_3\} + \\
&+ \cancel{Pr\{A_1 \cap A_2 \cap A_3\}} \rightarrow \textit{evento impossibile} \\
&= 0.007 \\
&= 0.7\%
\end{aligned}$$

Esercizio 1.22:

L'urna U_1 contiene 2 palline bianche e 3 palline nere, l'urna U_2 ne contiene 4 bianche e 1 nera e infine l'urna U_3 ne contiene 3 bianche e 4 nere. Si sceglie a caso un'urna e se ne estrae una pallina bianca. Calcolare la probabilità che questa appartenga alla prima urna.

Soluzione: L'estrazione di una pallina bianca è un evento A che fa parte dello spazio campione S, sapendo che A è vero la probabilità di verificare che A sia la causa dell'estrazione della pallina dalla j-esima urna (U_j) si scrive con il teorema di Bayes:

$$\Pr\{U_j|A\} = \frac{\Pr\{U_j\} \times \Pr\{A|U_j\}}{\sum_i^n \Pr\{U_i\} \times \Pr\{A|U_i\}}$$

quindi la probabilità che la pallina bianca sia stata estratta dalla prima urna è:

$$\Pr\{U_1|A\} = \frac{\Pr\{U_1\} \times \Pr\{A|U_1\}}{\sum_i^n \Pr\{U_i\} \times \Pr\{A|U_i\}}$$

dove le probabilità sono:

$$\Pr\{U_j\} = \frac{1}{3}; \qquad \Pr\{A|U_1\} = \frac{2}{5}; \qquad \Pr\{A|U_2\} = \frac{4}{5}; \qquad \Pr\{A|U_3\} = \frac{3}{7}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\Pr\{U_1|A\} &= \frac{\frac{2}{5}\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}(\frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{7})} \\
&= \frac{14}{57} \\
&= 24.6\%
\end{aligned}$$

Esercizio 1.23:

Un circuito elettrico è costituito da due resistenze identiche disposte in parallelo R_1 e R_2. Per determinare l'affidabilità del circuito vengono effettuate una serie di misure sperimentali sulle resistenze utilizzate. Si scopre che in 909 casi su 1000 la resistenza R_1 non subisce guasti se la resistenza R_2 funziona correttamente. Nel caso in cui R_2 non funzioni invece di verifica un guasto in R_1 su 217 casi su 1000.
Si calcoli la probabilità di buon funzionamento del sistema illustrato.

Soluzione: Definiamo il sistema delle due resistenze in parallelo come $R \equiv R_1 \cup R_2$. Dal testo possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} &\Pr\{R_1|R_2\} = 90.9\%; \qquad \Pr\{\overline{R}_1|\overline{R}_2\} = 21.7\% \\ &\Pr\{R_1|\overline{R}_2\} = 1 - \Pr\{\overline{R}_1|\overline{R}_2\} = 78.3\% \end{aligned}$$

Quindi la probabilità di buon funzionamento si può scrivere come:

$$\Pr\{R_1 \cup R_2\} = \Pr\{R_1\} + \Pr\{R_2\} - \Pr\{R_1 \cap R_2\}$$

dove le $\Pr\{R_1\} = \Pr\{R_2\} =?$ Per ricavarle ci dobbiamo ricordare della regola di Bayes o regola di partizione e somma degli spazi campioni:

$$\begin{aligned} \Pr\{R1\} &= \Pr\{R1|R2\} \times \Pr\{R2\} + \Pr\{R1|\overline{R2}\} \times \Pr\{\overline{R2}\} \\ &= \Pr\{R1|R2\} \times x + \Pr\{R1|\overline{R2}\} \times (1 - x) \\ x &= 89.6\% \end{aligned}$$

Sostituendo nella equazione precedente:

$$\begin{aligned} \Pr\{R_1 \cup R_2\} &= 2 \cdot 0.896 - 0.909 \cdot 0.896 \\ &= 97.8\% \end{aligned}$$

Esercizio 1.24:

Un'azienda consta di tre reparti, uno di prelavorazione (A) e due equivalenti, in parallelo fra loro, di rifinitura del prodotto (B_1 e B_2). Il reparto A funziona sempre in condizioni di s-indipendenza dagli altri due e la sua affidabilità è dell'80%.
a) In condizioni di bassa produzione (P) la probabilità di buon funzionamento di ciascun reparto di finitura vale 90%. A causa della passa produzione ogni reparto B è in grado di garantire la finitura della produzione del reparto A indipendentemente dal buon funzionamento del secondo reparto B. Calcolare l'affidabilità del sistema di produzione.
b) In condizioni di alta produzione ($\overline{P}$), la probabilità di buon funzionamento di ciascuno dei reparti B scende al 50% nel caso in sui il secondo reparto B non funzioni. Calcolare l'affidabilità del sistema di produzione.
c) L'azienda lavora a bassa produttività per il 60% del tempo ed ad alta produttività per il rimanente tempo. Calcolare l'affidabilità del sistema.

Soluzione: Iniziamo scrivendo l' informazione che abbiamo dal testo:

$$\Pr\{B_1\} = \Pr\{B_2\} = 0.9; \qquad \Pr\{A\} = 0.8; \qquad \Pr\{B_i|B_j\} = 0.9; \qquad \Pr\{B_i|\overline{B}_j\} = 0.5$$

Infine definiamo come G il sistema finale $G = A \cap (B_1 \cup B_2)$.

a) Nel caso di bassa produzione P sappiamo che l'affidabilità dei componenti B è sempre del 90%, quindi:

$$\begin{aligned}\Pr\{G\} &= \Pr\{A\} \times \Pr\{B_1 \cup B_2\} \rightarrow \textit{sono s-indipendenti} \\ &= \Pr\{A\} \times [\Pr\{B_1\} + \Pr\{B_2\} - \Pr\{B_1 \cap B_2\}] \rightarrow \textit{sono s-indipendenti} \\ &= \Pr\{A\} \times [\Pr\{B_1\} + \Pr\{B_2\} - \Pr\{B_1\} \times \Pr\{B_2\}] \\ &= 0.8 \cdot \left[2 \cdot 0.9 - 0.9^2\right] \\ &= 0.792\end{aligned}$$

b) In caso di produttività elevata $\overline{P}$ i blocchi di produzione A e B continuano a essere s-indipendenti, ma B_1 e B_2 invece sono s-dipendenti, quindi la probabilità dell'intero sistema sarà:

$$\begin{aligned}\Pr\{G\} &= \Pr\{A\} \times [\Pr\{B_1\} + \Pr\{B_2\} - \Pr\{B_1 \cap B_2\}] \rightarrow \textit{sono s-dipendenti} \\ &= \Pr\{A\} \times [\Pr\{B_1\} + \Pr\{B_2\} - \Pr\{B_1|B_2\} \times \Pr\{B_2\}]\end{aligned}$$

In questo caso non conosciamo le probabilità non condizionate di B_1 e di B_2 possiamo ricavarle usando la regola di Bayes:

$$\begin{aligned}\Pr\{B_1\} &= \Pr\{B_1|B_2\} \times \Pr\{B_2\} + \Pr\{B_1|\overline{B}_2\} \times \Pr\{\overline{B}_2\} \\ x &= \Pr\{B_1|B_2\} \times x + \Pr\{B_1|\overline{B}_2\} \times (1 - x)\} \\ &= 0.833\end{aligned}$$

quindi sostituendo nella equazione precedente:

$$\begin{aligned}\Pr\{G\} &= 0.8 \cdot [0.833 + 0.833 - 0.9 \cdot 0.833] \\ &= 0.733\end{aligned}$$

c) In questo caso basta applicare nuovamente la regola di Bayes immaginando di dividere lo spazio campione nei due sottoinsiemi P e $\overline{P}$:

$$\begin{aligned}\Pr\{G\} &= \Pr\{G|P\} \times \Pr\{P\} + \Pr\{G|\overline{P}\} \times \Pr\{\overline{P}\} \\ &= 0.792 \cdot 0.6 + 0.733 \cdot 0.4 \\ &= 0.768\end{aligned}$$

Esercizio 1.25:

Una manager ha a disposizione 4 impiegati da destinare a due differenti "punti di contatto" con l'utenza. Purtroppo due impiegati danno pieno affidamento (A) e due no ($\overline{A}$). Supponiamo che

	Punto 1	Punto 2
1	A, A, $\overline{A}$	$\overline{A}$
2	A, A	$\overline{A}$, $\overline{A}$
3	A	A, $\overline{A}$, $\overline{A}$
4	A, $\overline{A}$	A, $\overline{A}$

l'utenza si rivolga con eguale probabilità ai due punti e che per ogni punto l'impiegato interpellato venga scelto a caso tra tutti quelli presenti. In quale delle disposizioni indicate nella tabella il manager dovrà disporre i suoi impiegati per massimizzare la probabilità di contatto con un dei due impiegati migliori?

Soluzione: Facciamo tutti i casi, chiamiamo G l'affidabilità allo sportello, P_i scelta dello sportello i:
1) Caso numero 1:

$$\begin{aligned}\Pr\{G\} &= \Pr\{G|P_1\}\Pr\{P_1\} + \Pr\{G|P_2\}\Pr\{P_2\} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2) Caso numero 2:

$$\begin{aligned}\Pr\{G\} &= 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3) Caso numero 3:

$$\begin{aligned}\Pr\{G\} &= 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

4) Caso numero 4:

$$\begin{aligned}\Pr\{G\} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 1.26:

Due macchine utensili identiche A e B lavorano indipendentemente allo stesso ritmo di produzione ed eseguendo la stessa lavorazione. Su otto ore ciascuna di esse ha una affidabilità pari a 0.999. Quando il flusso produttivo è normale (H_1) le due macchine assieme assolvono il loro compito con probabilità pari a 99.99%. Se una si guasta l'altra fa fronte con probabilità pari a 0.60.
a) Calcolare l'affidabilità del sistema.
b) Quando il flusso produttivo è intenso (H_2) i parametri di sui sopra diventano rispettivamente 0.98 e 0.35. Quanto vale ora la probabilità di buon funzionamento del sistema?
c) Prevedendo che le macchine lavorino in condizioni di intensa produzione nel 15% del tempo, calcolare l'affidabilità del sistema.

Soluzione: Come sempre scriviamo i dati in forma adeguata considerando G il sistema che assolve al proprio compito:

$$\begin{aligned}&\Pr\{A\} = \Pr\{B\} = 0.999; \qquad \Pr\{G|(A\cap B)\}_{H_1} = 0.9999; \qquad \Pr\{G|(\overline{A}\cap B)\}_{H_1} = \Pr\{G|(A\cap\overline{B})\}_{H_1} = 0.60 \\ &\Pr\{G|(A\cap B)\}_{H_2} = 0.98; \qquad \Pr\{G|(\overline{A}\cap B)\}_{H_2} = \Pr\{G|(A\cap\overline{B})\}_{H_2} = 0.35\end{aligned}$$

a) L'affidabilità del sistema è la probabilità di portare a compimento il lavoro si trova con la Regola di Bayes:

$$\begin{aligned}\Pr\{G\}_{H_1} &= \Pr\{G|(A\cap B)\}_{H_1}\times\Pr\{A\cap B\}_{H_1} + \Pr\{G|(\overline{A}\cap B)\}_{H_1}\times\Pr\{\overline{A}\cap B\}_{H_1} \\ &+ \Pr\{G|(A\cap\overline{B})\}_{H_1}\times\Pr\{A\cap\overline{B}\}_{H_1} + \cancel{\Pr\{G|(\overline{A}\cap\overline{B})\}_{H_1}}\times\Pr\{\overline{A}\cap\overline{B}\}_{H_1} \\ &= 0.9999\cdot 0.999^2 + 2\cdot 0.60\cdot(1-0.999)\cdot 0.999 \\ &= 0.9991\end{aligned}$$

b) In caso di flusso produttivo intenso basta usare i dati relativi al caso:

$$\begin{aligned}
\Pr\{G\}_{H_2} &= \Pr\{G|(A\cap B)\}_{H_2} \times \Pr\{A\cap B\}_{H_2} + \Pr\{G|(\overline{A}\cap B)\}_{H_2} \times \Pr\{\overline{A}\cap B\}_{H_2} \\
&\quad + \Pr\{G|(A\cap \overline{B})\}_{H_2} \times \Pr\{A\cap \overline{B}\}_{H_2} + \cancel{\Pr\{G|(\overline{A}\cap \overline{B})\}_{H_2}} \times \Pr\{\overline{A}\cap \overline{B}\}_{H_2} \\
&= 0.98 \cdot 0.999^2 + 2 \cdot 0.35 \cdot (1-0.999) \cdot 0.999 \\
&= 0.9787
\end{aligned}$$

c) In questo caso abbiamo che la probabilità del sistema a ciclo produttivo normale

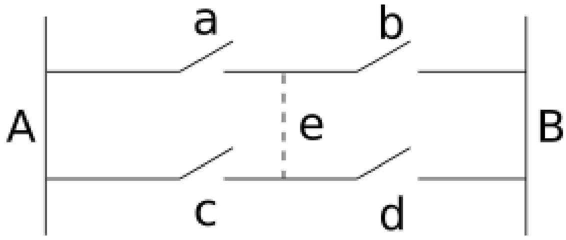
$$\Pr\{G\}_{H_1} \to \Pr\{G|H_1\}$$

e la stessa cosa per il caso di ciclo produttivo intenso. Quindi la probabilità totale si otterrà ancora una vota applicando la Regola di Bayes:

$$\begin{aligned}
\Pr\{G\} &= \Pr\{G|H_1\} \times \Pr\{H_1\} + \Pr\{G|H_2\} \times \Pr\{H_2\} \\
&= 0.9787 \cdot 0.15 + 0.9991 \cdot 0.85 \\
&= 0.9960
\end{aligned}$$

Esercizio 1.27:

Un gruppo di interruttori (a, b, c, d) è collegato ai cavi elettrici A e B come illustrato in figura. Si può assumere che gli interruttori funzionino elettricamente, che abbiamo meccanismi indipendenti e che siano controllati simultaneamente dagli stessi impulsi. In seguito ad un impulso tutti gli interruttori si chiudono contemporaneamente, ma ognu interruttore ha probabilità p di non corretto funzionamento (può non chiudersi completamente).



a) Calcolare la probabilità che il circuito non si chiuda.
b) Se si aggiunge un cavo e, calcolare la probabilità che il circuito non si chiuda.
c) Calcolare la probabilità che il circuito da A a B non si chiuda supponendo che in e vengano aggiunti un cavo ed un interruttore.

Soluzione: a) Tutti gli interruttori sono s-indipendenti quindi possiamo dire che:

$$\Pr\{\overline{a}\} = \Pr\{\overline{b}\} = \Pr\{\overline{c}\} = \Pr\{\overline{d}\} = p$$

Indichiamo con G l'evento circuito che si chiude, quindi $\overline{G}$ = evento circuito che non si chiude. La situazione illustrata in figura porta alla non chiusura del circuito se entrambe le linee che collegano A e B vengono interrotte, quindi se si apre simultaneamente uno dei due interruttori su ciascuna linea: a oppure b e c oppure d. Questo si traduce in formula:

$$\begin{aligned}
\Pr\{\overline{G}\} &= \Pr\{(\overline{a}\cup\overline{b})\cap(\overline{c}\cup\overline{d})\} \\
&= \Pr\{(\overline{a}\cup\overline{b})\} \times \Pr\{(\overline{c}\cup\overline{d})\} \\
&= \Big[\Pr\{\overline{a}\} + \Pr\{\overline{b}\} - \Pr\{(\overline{a}\cap\overline{b})\}\Big] \times \Big[\Pr\{\overline{c}\} + \Pr\{\overline{d}\} - \Pr\{(\overline{c}\cap\overline{d})\}\Big] \to \textit{sono s-indipendenti} \\
&= \Big[\Pr\{\overline{a}\} + \Pr\{\overline{b}\} - \Pr\{(\overline{a}\} \times \Pr\{\overline{b})\}\Big] \times \Big[\Pr\{\overline{c}\} + \Pr\{\overline{d}\} - \Pr\{(\overline{c}\} \times \Pr\{\overline{d})\}\Big] \\
&= (2p-p^2)\cdot(2p-p^2) \\
&= p^2(2-p)^2
\end{aligned}$$

b) Aggiungere un cavo che collega i due rami orizzontali cambia il modo in cui devo pensare il circuito mettendo in collegamento tutti gli interruttori:

$$\begin{aligned}
\Pr\{\overline{G}\} &= \Pr\{(\overline{a} \cap \overline{c}) \cup (\overline{b} \cap \overline{d})\} \\
&= \Pr\{(\overline{a} \cap \overline{c})\} + \Pr\{(\overline{b} \cap \overline{d})\} - \Pr\{\overline{a} \cap \overline{c} \cap \overline{b} \cap \overline{d})\} \\
&= 2p^2 - p^4 \\
&= p^2(2 - p^2)
\end{aligned}$$

c) Se aggiungiamo in interruttore possiamo rifare tutto il calcolo fatto precedentemente oppure usare la regola di Bayes:

$$\begin{aligned}
\Pr\{\overline{G}\} &= \Pr\{\overline{G}|e\} \times \Pr\{e\} + \Pr\{\overline{G}|\overline{e}\} \times \Pr\{\overline{e}\} \\
&= p^2(2 - p^2) \cdot (1 - p) + p^2(2 - p)^2 \cdot p
\end{aligned}$$