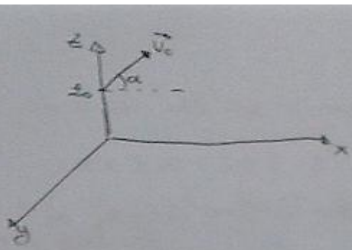
Esercizio 1

Una palla viene lanciata da un'altezza di 5 *m* con velocità iniziale di modulo *v*0 = 15 *m/s* ed avente un angolo $\theta = 60^\circ$ rispetto all'orizzonte (si veda la figura qui a destra). Si determini:

a) il tempo di volo;
b) l'altezza massima raggiunta;
c) il punto di impatto con il suolo;
d) il modulo della velocità un attimo prima di giungere al suolo.

$z_0 = 5\ m$
$V_0 = 15\ m/s$
$\alpha = 60^\circ$



a) La legge oraria della pallina è:

$$\begin{cases} x = V_{0x}\, t \\ z = z_0 + V_{0z}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Il tempo di volo si ottiene ponendo $z=0$ $\Rightarrow 0 = z_0 + V_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g t^2 - V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - z_0 = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{V_0 \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{(V_0 \operatorname{sen}\alpha)^2 + 2 g z_0}}{g} = 2{,}99\ s$$

b) L'altezza massima si raggiunge quando $V_z = 0$

$V_z = V_{0z}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow z_{max} = \frac{V_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2\alpha + z_0 = 13{,}6\ m$

c) Il punto d'impatto al suolo sarà dato da:

$x = V_{0x} \cdot t$ con t: tempo di volo

$\Rightarrow x = V_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t = 22{,}4\ m$

d) Per la velocità abbiamo

$$\begin{cases} V_{0x} = V_x \\ V_z = V_{0z} - g t \end{cases} \qquad \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_z = V_0 \operatorname{sen}\alpha - g t \end{cases}$$

Sempre con t: tempo di volo $\Rightarrow V_x = 7{,}5\ m/s$
$V_z = -13{,}61\ m/s$

$\Rightarrow V = \sqrt{V_x^2 + V_z^2} = 17{,}9\ m/s$

Esercizio 2

Un punto materiale si muove su un'orbita circolare, orizzontale di raggio R e la sua velocità angolare segue la legge: $\omega(t) = A\sqrt{t}$. Determinare:

a) Il modulo dell'accelerazione quando $t = t_1$;
b) Il tempo necessario a fare un giro a partire dall'istante iniziale.

R=10m
t1=0.4s

$A = 2\,\text{rad s}^{-3/2}$

Esercizio 2

a) I termini tangenziale e centripeto dell'accelerazione sono dati rispettivamente da

$a_t = R\dot{\omega} = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\frac{AR}{\sqrt{t_1}} = 15{,}8\ m/s^2$

$a_n = \omega^2 R = A^2 t_1 R = 16\ m/s^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 22{,}5\ m/s^2$

b) Ricordando $\omega = \frac{d\theta}{dt} = A\sqrt{t} \Rightarrow d\theta = A\sqrt{t}\,dt$

Integrando troviamo la legge oraria per ricavare lo spostamento angolare

$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = A\int_{t_0}^{t}\sqrt{t}\,dt \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}At^{\frac{3}{2}} + \theta_0$ con $t_0=0$, $\theta_0=0$

Per fare un giro completo impiega:

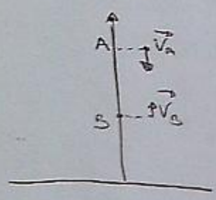
$2\pi = \frac{2}{3}A\,t^{3/2} \Rightarrow t = 2{,}8\,s$

Esercizio 3

Un punto materiale A viene lasciato cadere con velocità nulla da un'altezza dal suolo h_A=45 m; contemporaneamente un punto materiale B, passante per la verticale di A e situato a un'altezza h_B=21 m, viene lanciato verso l'alto con velocità di modulo v_0. Si calcoli, trascurando la resistenza dell'aria:

a) Il valore minimo v_0^* di v_0 per il quale A e B si urtano prima di giungere al suolo;
b) La velocità con la quale si urtano i due punti materiali quando $v_0 \geq v_0^*$;
c) Il valore di v_0 per il quale A e B si urtano alla quota h_C=40 m.

Esercizio 3



Le posizioni di A e B sono descritte da:

$$\begin{cases} z_A(t) = h_A + V_{0A} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ z_B(t) = h_B + V_{0B} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \text{con } V_{0A} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_A(t) = h_A - \frac{1}{2} g t^2 \\ z_B(t) = h_B + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La distanza tra A e B è: $d(t) = z_A(t) - z_B(t) = h_A - h_B - V_0 t$

$\Rightarrow$ Tale il tempo dopo il quale A e B si urtano $t_1 = \dfrac{h_A - h_B}{V_0}$

Per avere l'urto prima che i due punti giungano al suolo, deve essere $t_1 \leq t_2 = \sqrt{\dfrac{2 h_A}{g}}$

con t_2: tempo impiegato da A per raggiungere il suolo

$$\Rightarrow \frac{h_A - h_B}{V_0} \leq \sqrt{\frac{2 h_A}{g}} \Rightarrow V_0^* \geq \frac{h_A - h_B}{\sqrt{2 h_A / g}} = 8 \text{ m/s}$$

b) La velocità di A e B valgono:

$$\begin{cases} V_A(t) = \dfrac{d z_A(t)}{dt} = -g t \\ V_B(t) = \dfrac{d z_B(t)}{dt} = V_0 - g t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La velocità relativa è: $V_A(t) - V_B(t) = -V_0 = \text{cost}$

$\Rightarrow$ La velocità dell'urto vale V_0

c) il punto A passa alla quota h_C dopo: $t_C = \sqrt{\dfrac{2(h_A - h_C)}{g}} = 1 \text{ s}$

Dopo t_C la quota di B sarà: $z_B = h_B + V_0 \cdot t_C - \frac{1}{2} g t_C^2 = h_B - h_A + h_C + V_0 \sqrt{\dfrac{2(h_A - h_C)}{g}}$

Pongo $z_B = h_C$ e ottengo $V_0 = \dfrac{h_A - h_B}{t_C} = 24 \text{ m/s}$