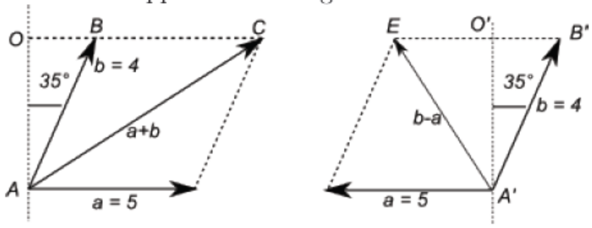
Esercizio 1

Il vettore $\vec{a}$ ha un modulo di 5.0 unità ed è orientato verso est. Il vettore $\vec{b}$ è orientato in direzione di 35 a est rispetto al nord e ha un modulo di 4.0 unità. Si costruiscano i diagrammi vettoriali per calcolare $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$. Si stimino i moduli e le direzioni dei vettori somma e differenza in base ai diagrammi.

Soluzione: La rappresentazione grafica dei vettori nelle due condizioni è quella mostrata in figura



Per calcolare i moduli e le direzioni delle risultanti, dobbiamo ricorrere ai teoremi della trigonometria. Calcoliamo il vettore $\vec{a} + \vec{b}$ come ipotenusa del triangolo rettangolo AOC. Dobbiamo però prima calcolare il segmento OB, mediante il teorema dei triangoli rettangoli, per il quale ogni cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o il coseno dell'angolo adiacente.

$$OB = 4 \cdot \sin 35 = 2.29\, u$$

quindi

$$OC = OB + BC = 5 + 2.29 = 7.29\, u$$

calcoliamo poi OA

$$OA = 4 \cdot \cos 35 = 3.28\, u$$

Applicando il teorema di Pitagora, si ha quindi

$$AC = \sqrt{3.28^2 + 7.29^2} = 8\, u$$

la direzione di tale vettore, rispetto al nord è

$$\alpha = \arctan\left(\frac{7.29}{3.28}\right) = 65.8$$

Calcoliamo ora il modulo del vettore $\vec{b} - \vec{a}$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo $EO'A'$. Calcoliamo prima EO'

$$EO' = EB - O'B = 5 - 2.29 = 2.71\, u$$

Pertanto

$$EA' = \sqrt{2.71^2 + 3.28^2} = 4.3\, u$$

la sua direzione, rispetto al nord dalla parte ovest, è

$$\beta = \arctan\left(\frac{2.71}{3.28}\right) = 39.6$$

Esercizio 2

La posizione di un corpo in moto lungo l'asse delle x è descritto dall'equazione in funzione del tempo *t* (in secondi) *x(t)* = 3m +(10 m/s)*t* – (4 m/s^2)*t*^{2}. Segnare con SI o una crocetta le affermazioni corrette, le altre con un NO o nessun segno.

(A) La velocità al tempo *t*=0 è di 10 m/s.

Per calcolare l'espressione della velocità faccio la derivata dell'equazione del moto rispetto alla variabile tempo, *t*. Di conseguenza avrò che l'espressione sarà:

v(t)* = 10 m/s – 8 m/s^2**t.

Per trovare la velocità al tempo t=0 basta sostituire questo valore alla variabile t. la risposta è v=10 m/s.

(B) L'accelerazione è sempre pari a –2 m/s2.

Per calcolare l'espressione dell'accelerazione faccio la derivata dell'eespressione della velocità rispetto alla variabile tempo, *t*. Di conseguenza avrò che l'espressione sarà:

***a(t)* = – 8 m/s^2.**

L'accelerazione è indipendente dal tempo ed è sempre uguale a -8 m/s^2.

(C) La velocità media nell'intervallo di tempo tra *t*=1s e *t*=2s vale, in modulo, 3m/s.

L'espressione della velocità media è data da: $\langle v\rangle = \dfrac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$

Sostituendo i valori trovo che il modulo della velocità media vale 2m/s.

(D) Il corpo è fermo quando ha raggiunto il punto di ascissa *x*=9.25m.

Per sapere se il corpo è fermo dopo 9.25m devo calcolare la sua velocità dopo che ha percorso quella distanza.

(E) La velocità è pari a quella iniziale e con segno opposto dopo un tempo di 10s.

Devo calcolare il valore della velocità a t=0s e a t=10s. Dall'espressione della velocità trovo:

v(0) = 10 m/s.
v(10) = 10 m/s – 80 m/s=-70 m/s

Le due velocità sono diverse sia in modulo che verso.

Esercizio 3

Due automibili A e B viaggiano lungo una strada rettilinea piana, a distanza d l'una dall'altra con la stessa velocità in modulo v_0=72 km/h. a un certo punto il guidatore dell'automobile di testa A frena, l'automobile prosegue con accelerazione scalare costante a_A e si arresta dopo un tratto l=50 m. Il guidatore dell'automobile B inizia la frenata con un ritardo τ=0.4 s e l'automobile prosegue con accelerazione costante a_B. Si calcoli:

(A) l'accelerazione a_A

sia t=0 l'istante in cui il guidatore A inizia a frenare. Sulla traiettoria delle due automobili si fissi un sistema di ascisse centrato in B e con verso concorde al moto. Le leggi del moto che governano A sono le seguenti:

$$v_A(t) = v_0 + a_A t$$

$$S_A(t) = d + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

L'automobile A si arresterà al tempo t_1, e di conseguenza avrò:

$v_A(t_1)=0$ $$a_A = \frac{-v_0}{t_1}$$

Sempre al tempo t1 avrò che $S_A(t_1)$-d=50 m=l e quindi da $l = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t - \frac{1}{2}v_0 t = \frac{1}{2}v_0 t$

Ricavo il tempo di arresto per A: $t = \frac{2l}{v_0} = \frac{2 \cdot 50m}{72km/h} = \frac{2 \cdot 50m \cdot 3.6 \cdot 10^3 s}{7.2 \cdot 10^4 m} = 5s$

L'accelerazione di A varrà $a_A = \frac{-v_0}{t_1} = \frac{-7.2 \cdot 10^4 m}{3.6 \cdot 10^3 s * 5s} = -4m/s^2$

b)il valore minimo di *d* affinché le automobili non si urtino se a_A=a_B.

All'istante t=τ=0.4 s il guidatore B inizia a frenare e il moto diventa uniformemente decelerato. Per t≤τ valgono le seguenti relazioni: ù

$$v_B(t) = v_0$$
$$S_B(t) = v_0 t$$

Se a_A=a_B affinché le automobili non si urtino è necessario che B arrivi con velocità minore di v_0 nella posizione dove A ha cominciato a rallentare, cioè deve percorrere, nel tempo τ, uno spazio minore di *d*. imponendo questa condizione si ricava **d>v_0t=8 m**.

La velocità di urto tra le due automobili se a_B=0.5a_A e d=8.68 m.

In questo caso abbiamo a_B=-2m/s^2 e le leggi che governano il moto di A e B saranno:

$$S_A(t) = d + v_0 t + \frac{1}{2}a_A t^2$$
$$S_B(t) = v_0 t + \frac{1}{2}a_B (t-\tau)^2$$

L'urto avverrà dopo un tempo *t* quando S_A=S_B. Mettendo a sistema le due equazioni e risolvendo rispetto a t, avrò t=2.6 s. Di conseguenza le velocità di A e B saranno:

$$v_A(t) = v_0 + a_A t = 9.6m/s^2$$
$$v_B(t) = v_0 + a_B(t-\tau) = 15.6m/s^2$$

La velocità relativa sarà data da $v_B(t) - v_A(t) = 6m/s$

Esercizio 4.

Un punto materiale si muove su una circonferenza di raggio r=1m con moto uniformemente accelerato. Negli intervalli di tempo (t_0=0, t_1=1 s) e (t_0=0, t_2=2 s) il punto percorre gli spazi C_1=0.15 m e C_2=0.4 m rispettivamente. Si calcoli:

a) l'accelerazione tangenziale a_T e la velocità v_0 all'istante t=0.

Posizioniamo il nostro sistema di riferimento nella posizione sulla circonferenza occupata dal punto materiale all'istante t_0. Varranno le seguenti leggi del moto:

$$v(t) = v_0 + a_T t \qquad s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2$$

Imponendo le condizioni date dal problema ho:

$$\begin{cases} s(t_1) = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_T t_1^2 = C_1 \\ s(t_2) = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a_T t_2^2 = C_2 \end{cases}$$

E risolvendo il sistema rispetto alle incognite a_T e v_0 trovo: **a_T=0.1 m/s2** e **v_0=0.1 m/s.**

b) il valore medio del modulo della velocità e dell'accelerazione tangenziale nell'intervallo di tempo (t_0=0, t_2=2 s).

Il valore medio v_m del modulo della velocità sarà dato da:

$$v_m = \frac{spazio \quad percorso}{tempo \quad impiegato} = \frac{0.4m}{2s} = 0.2m/s$$

Lo stesso discorso vale per l'accelerazione tangenziale media:

$$a_{Tm} = \frac{v(t_2) - v_0}{t_2 - t_0} = \frac{a_T t_2 + v_0 - v_0}{t_2} = \frac{a_T t_2}{t_2} = 0.1m/s^2$$

c) la velocità angolare ω e il modulo dell'accelerazione a all'istante t_2.

All'istante t_2 ho: $v(t_2) = v_0 + a_T t_2$

e quindi: $\omega(t_2) = \frac{v(t_2)}{r} = \frac{v_0 + a_T t_2}{r} = 0.3rad/s$

L'accelerazione ***a*** sarà data dalla somma vettoriale dell'accelerazione centripeta e dell'accelerazione tangenziale. Passando ai moduli ho:

$$|a| = \sqrt{a_c^2 + a_T^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2(t_2)}{r}\right)^2 + a_T^2(t_2)} = 0.13m/s^2$$