Meccanica dei fluidi

FLUIDI

LIQUIDI

Hanno volume proprio

Sono incomprimibili

GAS

Non hanno volume proprio

Sono facilmente comprimibili

CARATTERISTICHE COMUNI

Non sostengono gli sforzi di taglio (non hanno forma propria)

Non si può parlare di forza applicata in un punto

FORZE AGENTI SUI FLUIDI:

1. DI SUPERFICIE

Si manifestano sulle superfici di contatto e/o di separazione di fluidi e sono proporzionali alla superficie. Distinguiamo:

$$\tau = \frac{dF_t}{dS}$$ SFORZO DI TAGLIO → VISCOSITÀ

$$p = \frac{dF_n}{dS}$$ SFORZO NORMALE → PRESSIONE

Definiamo la pressione come il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto e l’area della superficie stessa.

Nel SI l’unità di misura della **pressione** è il **Pascal** [Pa]. Di uso comune anche il **bar**, che corrisponde a **10^5 Pa**. Deprecabile l’utilizzo dell’**atmosfera** [atm], che corrisponde a 1.01325×10^5 Pa.

2. DI VOLUME

Sono dovute al fatto che i fluidi hanno una massa e possono essere forze reali, come quella gravitazionale, o inerziali, come la forza centrifuga.

Data la natura dei fluidi ne consegue che **in condizioni di equilibrio non possono sussistere forze di taglio**

⇓

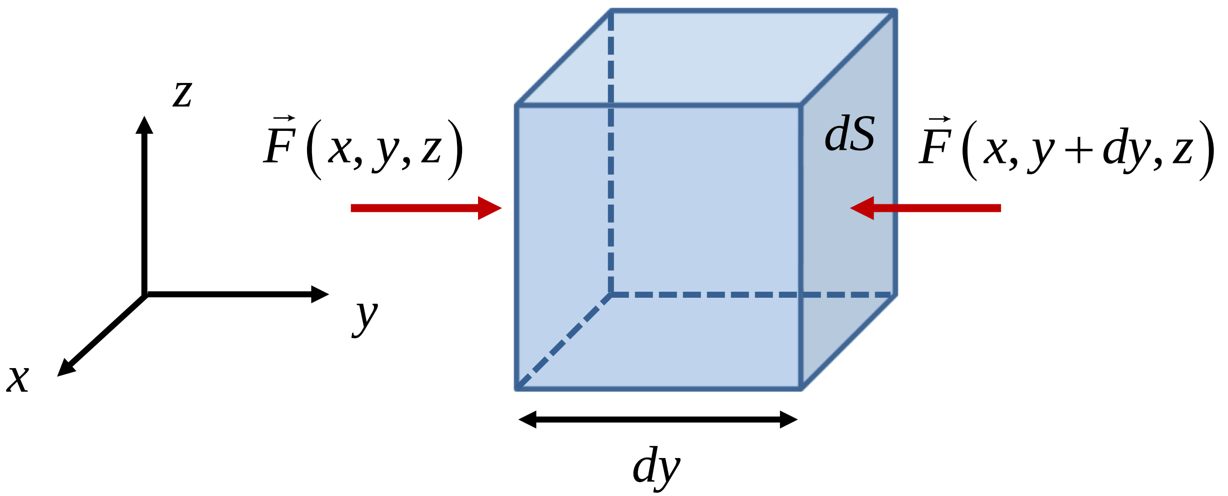
LA PRESSIONE IN UN FLUIDO È UNA FUNZIONE SCALARE DIPENDENTE DALLA POSIZIONE E INDIPENDENTE DALL’ORIENTAZIONE DELLA SUPERFICIE CONSIDERATA

STATICA

TRATTA DEI FLUIDI IN EQUILIBRIO STATICO PER CUI SI HANNO SOLO FORZE DI SUPERFICIE “NORMALI”.

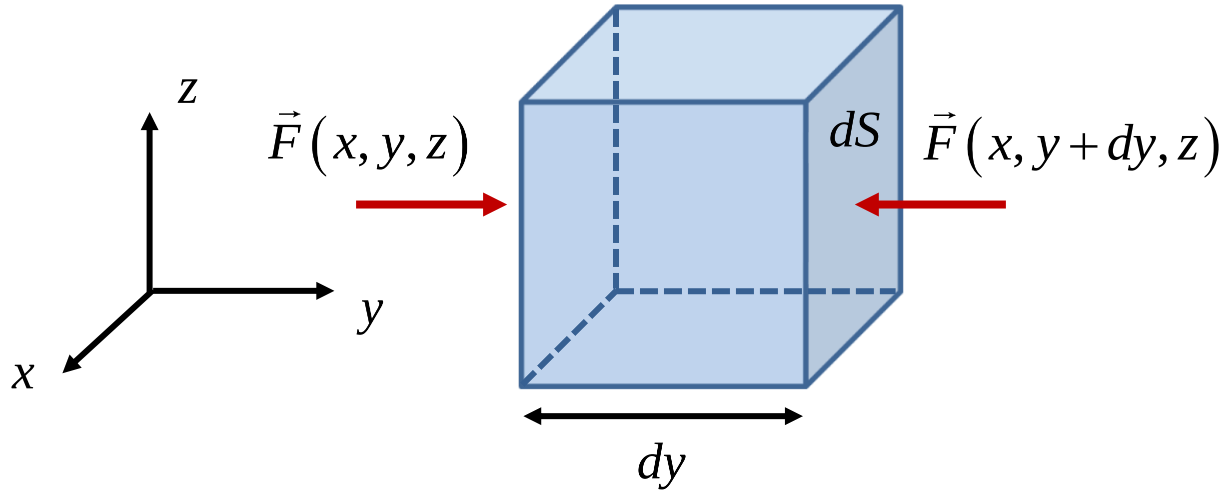
Considereremo solo **fluidi perfetti**:

- Incomprimibili;
- Non viscosi;
- In equilibrio.



In un sistema in quiete agiscono solo forze di superficie (pressioni) e di volume:

$$\vec{F}^{(S)}+\vec{F}^{(V)}=0$$



Considerando l’asse y si ha:

$$p(x,y,z)\,dxdz - p(x,y+dy,z)\,dxdz + \rho f_y dxdydz = 0$$

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dxdz + \rho f_y dxdydz = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y$$

Se consideriamo tutte le direzioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \end{cases}$$

EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA STATICA DEI FLUIDI

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} p = \rho \boxed{\vec{f}}$$

FORZA PER UNITÀ DI MASSA

LA PRESSIONE VARIA, IN UNA DIREZIONE (GRADIENTE DI PRESSIONE), IN MODO PROPORZIONALE ALLE FORZE DI VOLUME CHE AGISCONO IN QUELLA STESSA DIREZIONE

Se la forza di volume è conservativa, dalla relazione fra forza ed energia potenziale ricaviamo che:

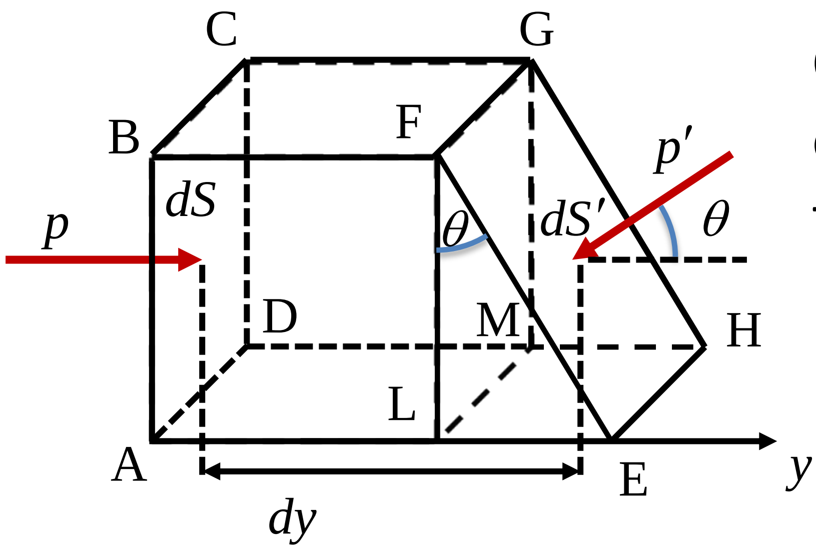
$$\vec{f} = -\vec{\nabla}\boxed{E_{p,m}}$$

ENERGIA POTENZIALE PER UNITÀ DI MASSA

Il gradiente della pressione ha la stessa direzione e verso opposto al gradiente dell'energia potenziale.

UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE È ISOBARICA E SU ESSA LA DENSITÀ DEL FLUIDO DEVE ESSERE COSTANTE

INDIPENDENZA DELLA PRESSIONE DALL'ORIENTAZIONE DELLA SUPERFICIE SU CUI AGISCE



Consideriamo una porzione di fluido in equilibrio, con la forma mostrata in figura, dove:

$$dS = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$dS' = \overline{EF} \cdot \overline{FG}$$

All'equilibrio $\sum_i \vec{F}_i = 0$

Lungo l'asse y

$$pdS - p'dS'\cos\theta + f_y \rho dS \Delta y = 0$$

$$dS'\cos\theta = \overline{FG} \cdot \overline{FE}\cos\theta = \overline{FG} \cdot \overline{FL} = dS$$

Nel limite per $\Delta V \rightarrow 0$ si ha $f_y \rho dS \Delta y \rightarrow 0$ $\Rightarrow$ $p - p' = 0$

LEGGE DI STEVINO

Consideriamo l'energia potenziale gravitazionale (possiamo quindi ridurre il problema a una singola dimensione). Si ha:

$$\left(\vec{\nabla} p\right)_z = \frac{dp}{dz} \qquad \left(\vec{\nabla} E_{p,m}\right)_z = \frac{dE_{p,m}}{dz} = \frac{dgz}{dz} = g$$

In base alla relazione fra energia potenziale e gradiente di pressione otteniamo che

$$dp = -\rho g dz \;\Rightarrow\; \int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

e l'espressione della variazione della pressione in un fluido (con densità costante) in equilibrio sotto l'azione della forza di gravità

$$p_2 - p_1 = -\rho g \left(z_2 - z_1\right)$$

Otteniamo infine la **LEGGE DI STEVINO**

$$p(h) = \boxed{p_0} + \rho g \boxed{h}$$

PRESSIONE ALLA SUPERFICIE LIMITE DEL LIQUIDO

PROFONDITÀ (>0)

In un fluido con densità costante la pressione cresce linearmente con la profondità a partire dalla pressione presente alla superficie limite del liquido.

PRINCIPIO DI PASCAL

OGNI VARIAZIONE DELLA PRESSIONE ESTERNA DÀ LUOGO A UN'UGUALE VARIAZIONE DELLA PRESSIONE ALLA PROFONDITÀ *P*.

Altre conseguenze della Legge di Stevino

Manometro a "U"

In un tubo a forma di "U" le superfici del liquido nei due rami si trovano allo stesso livello solamente se la pressione nei due rami è la stessa. Se invece, per esempio, $p_1 > p_2$, allora

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

Quindi, conoscendo il dislivello *h*, si ricava la differenza di pressione. Se nel tubo si inseriscono due liquidi non miscibili con densità ρ_1 e ρ_2 diverse e con le superfici libere a contatto con lo stesso ambiente a pressione p_0, si ha che

$$p = p_0 + \rho_1 g z_1 = p_0 + \rho_2 g z_2$$

Allora, si ha

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

Se poniamo $z_2 - z_1 = h$, abbiamo

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 + \frac{h}{z_1}$$

Stima della pressione atmosferica

Partendo dal fatto che la densità dell'aria diminuisce con la quota e considerando la temperatura costante (approssimazione), dalla legge di Boyle abbiamo che:

$$\frac{p}{\rho} = \text{cost}$$

Applicando Stevino

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{\rho_0 g}{p_0} p$$

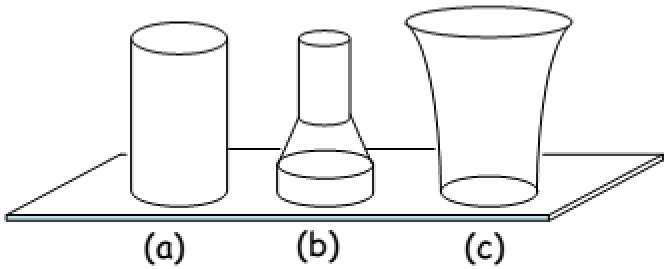
$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\underbrace{\boxed{\frac{\rho_0}{p_0}}}_{=\frac{1}{a} \text{ con } a \cong 8 \text{ km}} g dz$$

Integrando si ha:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{1}{a} \int_0^z dz \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{z}{a}$$

$$\Rightarrow p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{a}}$$

Paradosso idrostatico



$$\vec{F} = \vec{F}_p = M\vec{g} = \rho V\vec{g} = \rho Ah\vec{g}$$

Se la superficie di base A e'la stessa ed il livello del liquido contenuto è lo stesso, la forza (idrostatica) eseritata dal liquido, Aρgh, è uguale in tutti i casi e può risultare uguale (a), maggiore (b), o minore (c) del peso del liquido contenuto.

Superficie di separazione fra liquidi con diversa densità

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \rho_1 gh \\ p_1 &= p_0 + \rho_2 gh \end{aligned}\right\} \text{se } \rho_1 \neq \rho_2 \quad \Rightarrow \quad h = 0$$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido pari al volume della parte immersa del corpo.

In un fluido all'equilibrio, per un elemento di volume V, si ha:

$$\boxed{\vec{F}_S} + \boxed{\vec{F}_V} = \vec{F}_S + \boxed{m_F}\vec{g} = \vec{F}_S + \boxed{\rho_F}V\vec{g} = 0$$

FORZA DI SUPERFICIE (PRESSIONE)

FORZA DI VOLUME

MASSA DEL FLUIDO (CONTENUTO IN V)

DENSITÀ DEL FLUIDO

Se la densità dell'elemento di volume è diversa da quella del fluido, la risultante delle forze è diversa da zero e vale:

$$\vec{R} = \left(\rho - \rho_F\right)V\vec{g} = \rho V\vec{g}\boxed{-\rho_F V\vec{g}}$$

SPINTA DI ARCHIMEDE

DINAMICA

TRATTA DEI FLUIDI IN MOTO PER CUI SI HANNO, IN GENERE, FORZE NORMALI, DI TAGLIO E DI VOLUME (ATTRITI INTERNI E VISCOSITÀ)

ATTRITO INTERNO

Si manifesta in presenza di scorrimento relativo fra due elementi di fluido. La forza che si manifesta è tangenziale alla superficie di separazione fra i due elementi ed è opposta alla velocità relativa.

$$dF = \boxed{\eta}\,\boxed{dS}\,\boxed{\frac{dv}{dn}}$$

VARIAZIONE DEL MODULO DELLA VELOCITÀ IN DIREZIONE NORMALE A dS

VISCOSITÀ DEL FLUIDO

AREA DI CONTATTO

UNITÀ DI MISURA:
POISE (10^{-1} kg/ms)

NEI LIQUIDI $\eta \propto 1/T$

NEI GAS $\eta \propto T$

ALCUNE DEFINIZIONI

FLUIDO IDEALE

Si tratta di un fluido **non viscoso** (implica siano presenti solo forze normali alle superfici di contatto) con **densità costante** (implica che il fluido sia incompressibile).

REGIME STAZIONARIO

Se consideriamo un punto *P*, **tutti gli elementi** che vi passano in **istanti diversi** hanno la **stessa velocità**.

REGIME VARIABILE

La **velocità** in ogni punto del fluido è, in generale, **dipendente dal tempo**.

FLUIDO IN MOTO TURBOLENTO

La velocità varia in modo irregolare da punto a punto e con il tempo.

FLUIDO IN MOTO IRROTAZIONALE

Quando le particelle di fluido hanno velocità angolare nulla in un dato punto.

FLUIDO IN MOTO ROTAZIONALE

Sono presenti moti vorticosi. Esistenza di momenti angolari non nulli. Componenti della velocità ortogonali alla direzione del moto delle particelle.

TRATTEREMO:

FLUIDI STAZIONARI, IRROTAZIONALI, INCOMPRESSIBILI E NON VISCOSI

DUE APPRCCI DESCRITTIVI

1. LAGRANGE (1736-1813)

Descrive il comportamento dinamico di ogni particella di fluido.

$$x = x\left(x_0, y_0, z_0, t_0, t\right)$$

$$y = y\left(x_0, y_0, z_0, t_0, t\right)$$

$$z = z\left(x_0, y_0, z_0, t_0, t\right)$$

2. EULERO (1707-1783)

Si h L'introduzione di "variabili", come densità e velocità, che descrivono il comportamento medio delle particelle di fluido.

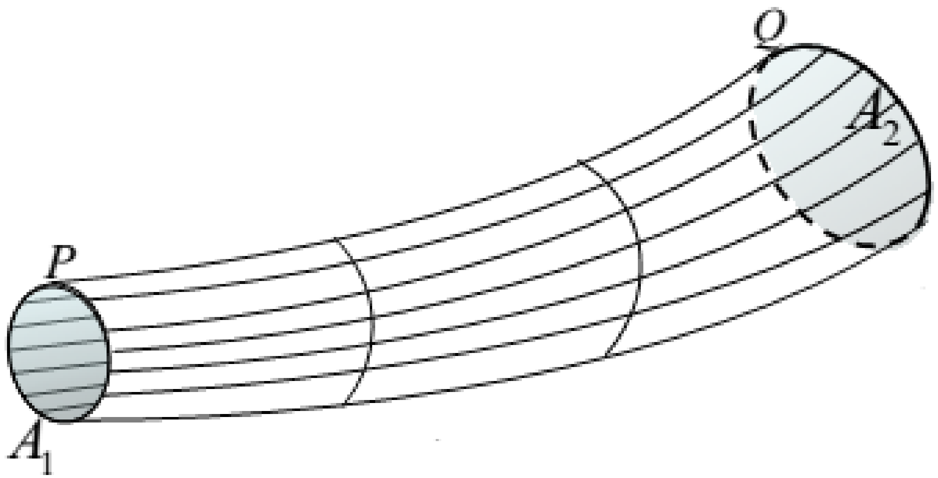
$$\rho = \rho\left(x, y, z, t\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}\left(x, y, z, t\right)$$

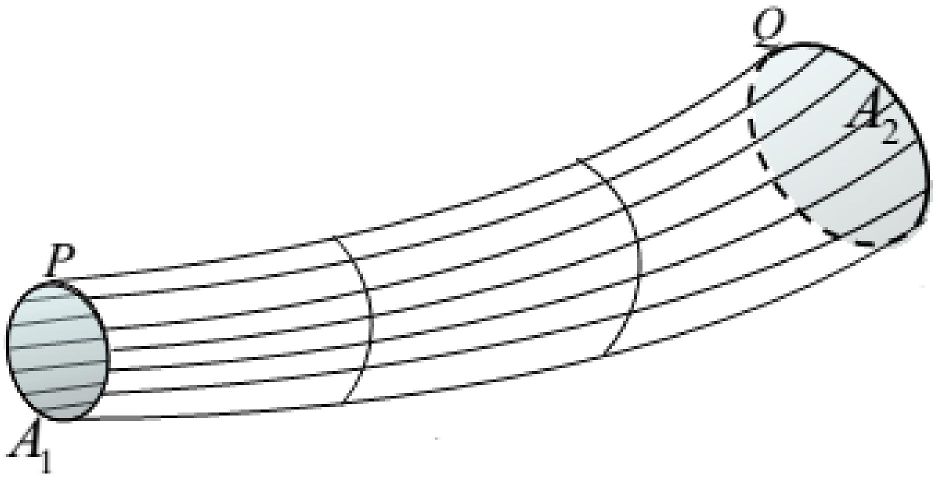
Adottiamo il metodo **euleriano** e studiamo quindi un dato punto del fluido: ogni grandezza fisica che identifica il comportamento del fluido avrà, in ogni punto di esso, un valore ben definito.

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Consideriamo un fluido in regime stazionario, tracciamo le **linee di corrente** e consideriamo il **tubo di flusso** indicato in figura. Valgono le seguenti affermazioni:



- Due linee di flusso non possono mai incrociarsi;
- L'insieme delle linee di flusso non cambia nel tempo;
- L'insieme delle linee di flusso passanti entro una linea chiusa immersa nel fluido definisce un: tubo di flusso.



La velocità del fluido nei punti P e Q è:

$$v_1 = v(P)$$

$$v_2 = v(Q)$$

Calcoliamo il flusso di massa che attraversa la superficie A_1 nel tempo Δt, con quest'ultimo sufficientemente piccolo da garantire che velocità e sezione non cambino nel tratto $v\Delta t$:

$$\Delta m_1 \cong \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta m_1}{\Delta t} \cong \rho_1 A_1 v_1$$

Flusso di massa in *P:* $\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m_1}{\Delta t}\right)_P = \left(\frac{dm_1}{dt}\right)_P = \rho_1 A_1 v_1$

Flusso di massa in *Q:* $\left(\frac{dm_2}{dt}\right)_Q = \rho_2 A_2 v_2$

Dobbiamo anche imporre che il tubo di flusso abbia pareti impenetrabili e che non vi siano né sorgenti né pozzi. In questo modo

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \Rightarrow \boxed{\rho A v = \text{cost.}}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

E, se il fluido è incomprimibile, si ha

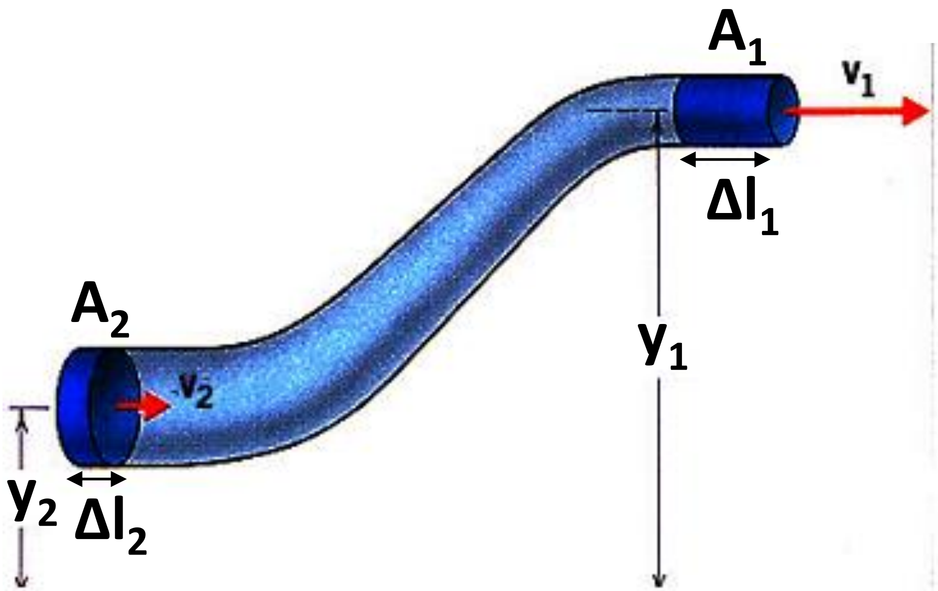
$$\boxed{A v = \text{cost.}}$$

LA PORTATA È COSTANTE

La velocità del fluido è alta dove il tubo è stretto (linee di flusso dense) e viceversa (linee di flusso rade).

TEOREMA DI BERNOULLI

Si ottiene dalle leggi della dinamica, considerando un fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale, in moto stazionario lungo una tubazione.



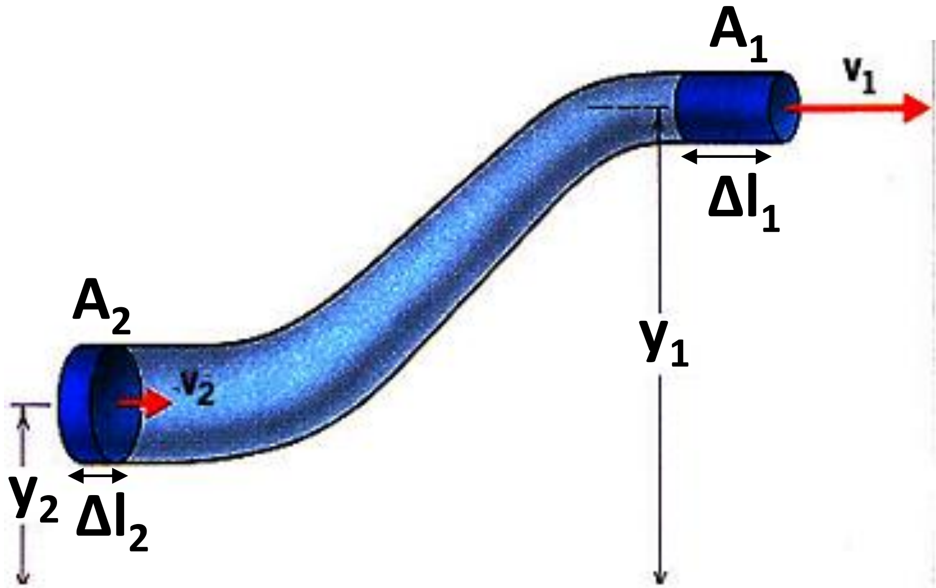
$$\Delta V = A\Delta l = Av\Delta t$$

$$\Delta m = \rho\Delta V$$

$$A_1\Delta l_1 = A_2\Delta l_2$$

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

Consideriamo il contributo delle forze di pressione, gravitazionali e la variazione dell'energia cinetica.



Utilizziamo il teorema dell'energia cinetica:

$$W_p + W_g = \Delta E_k$$

Il lavoro delle forze di pressione sommato a quello delle forze gravitazionali produce una variazione dell'energia cinetica.

Calcoliamo i singoli contributi:

$$W_p = W_{p,1} + W_{p,2}$$
$$= p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 = \left(p_1 - p_2\right)\Delta V$$

LAVORO DELLE FORZE DI PRESSIONE

$$W_g = -\Delta m g\left(y_2 - y_1\right)$$

LAVORO DELLE FORZE GRAVITAZIONALI

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

VARIAZIONE ENERGIA CINETICA

Sostituendo si ha:

$$\left(p_1 - p_2\right)\Delta V - \Delta m g\left(y_2 - y_1\right) = \frac{1}{2}\Delta m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$\left(p_1 - p_2\right)\cancel{\Delta V} - \rho\cancel{\Delta V}g\left(y_2 - y_1\right) = \frac{1}{2}\rho\cancel{\Delta V}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Separiamo i termini relativi ai due punti considerati:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

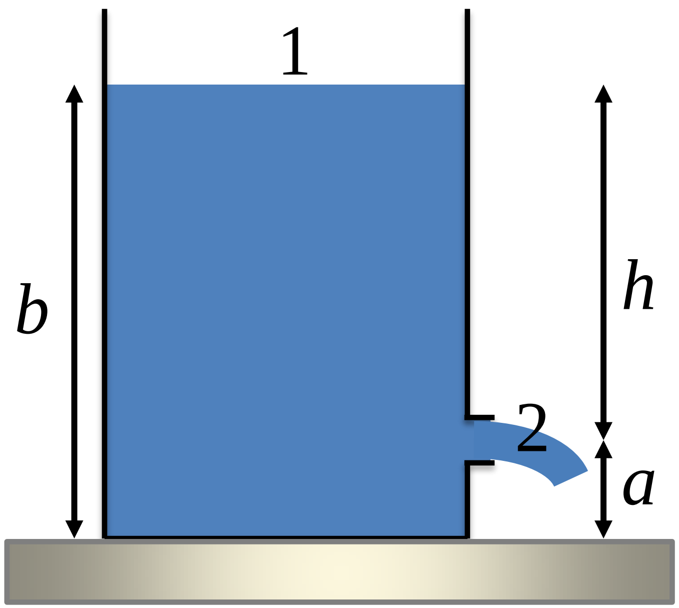
$$p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost.}$$ **TEOREMA DI BERNOULLI**

Se il fluido è in quiete, si ricava la legge di Stevino

Conseguenze del Teorema di Bernoulli

Teorema di Torricelli

Consideriamo una cisterna piena d'acqua di altezza **b**, nella quale è presente un foro distante **a** dal suolo. Applichiamo il Teorema di Bernoulli, considerando i punti **1** e **2**:



$$p_1 + \rho g b + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g a + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Possiamo porre $p_1 = p_2 = p_0$ e $v_1 = 0$, per cui:

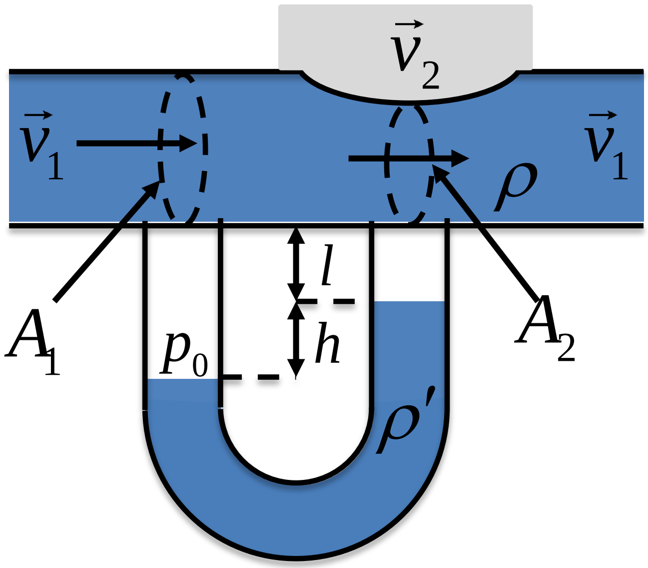
$$g(b-a) = gh = \frac{1}{2}v_2^2$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

TEOREMA DI TORRICELLI

Tubo di Venturi

Si utilizza per misurare la velocità nei fluidi. In un condotto orizzontale, il Teorema di Bernoulli si scrive:



$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost.}$$

$$\Rightarrow p_{A_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{A_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

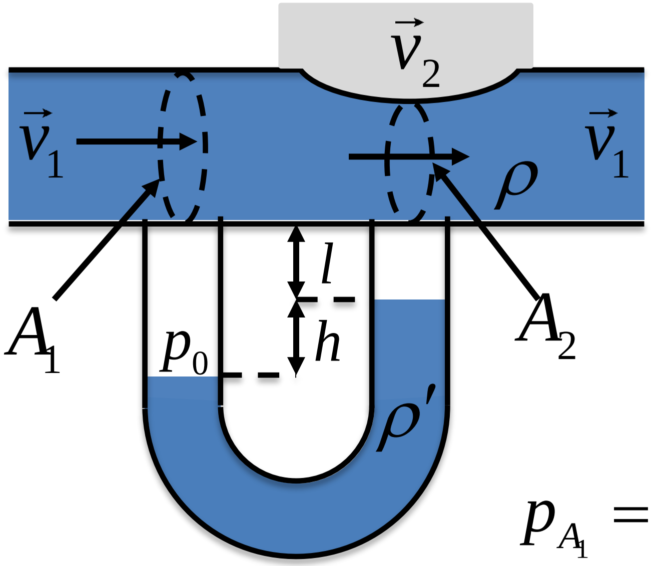
Inoltre, si conserva la portata:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\Rightarrow p_{A_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{A_2} + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A_1}{A_2} v_1 \right)^2$$

da cui

$$p_{A_2} - p_{A_1} = +\frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right)$$



Possiamo ricavare il valore di v_1

$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2\left(p_{A_2} - p_{A_1}\right)}{\rho\left(A_2^2 - A_1^2\right)}}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{A_1} &= p_0 - \rho g h - \rho g l \\ p_{A_2} &= p_0 - \rho' g h - \rho g l \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_{A_2} - p_{A_1} = -\left(\rho' - \rho\right) g h$$

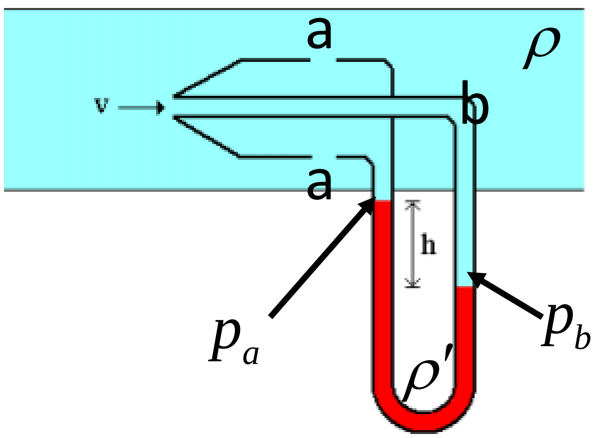
$$\Rightarrow \quad v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2\left(\rho' - \rho\right) g h}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}}$$

Dalla definizione di portata, si ricava che

$$\Phi = A_1 v_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2\left(\rho' - \rho\right) g h}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}}$$

Tubo di Pitot

Si utilizza per misurare la velocità dei gas. La pressione viene misurata in due posizioni, una parallela al flusso (a) e l'altra ad esso normale (b). Nella zona b la velocità è nulla, quindi da Bernoulli si ha:



$$p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_b$$

Inoltre, sappiamo che

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho' g h$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}}$$

Tiro a effetto

La rotazione della sfera fa si che in **1** sia presente una velocità maggiore rispetto a **2**. In questo modo, nella zona **2** si manifesta una maggiore pressione, che ha come conseguenza una forza diretta come in figura, che modifica la traiettoria del corpo.