Dinamica

STUDIA IL MOTO DEI CORPI IN RELAZIONE ALLE CAUSE CHE LO PRODUCONO.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Entrambi i casi prevedono lo studio della STATICA (condizioni per cui un corpo è in quiete)

CI OCCUPEREMO DI DINAMICA CLASSICA (Galileo e Newton)

VELOCITÀ PICCOLE RISPETTO ALLA VELOCITÀ DELLA LUCE

ALTRIMENTI SI DEVE INTRODURRE LA **RELATIVITÀ**

OCCORRE RIFORMULARE SOLO IL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

DIMENSIONI GRANDI RISPETTO A QUELLE ATOMICHE

ALTRIMENTI SI DEVE INTRODURRE LA **MECCANICA QUANTISTICA**

IL CONCETTO DI DINAMICA CAMBIA COMPLETAMENTE

PRINCIPIO ZERO DELLA DINAMICA

(DI RELATIVITÀ)

SE DUE LABORATORI SI MUOVONO DI MOTO RELATIVO TRASLATORIO RETTILINEO UNIFORME NON ESISTE UN ESPERIMENTO (DI MECCANICA) CHE DIA RISULTATI DIVERSI NELL'UNO E NELL'ALTRO LABORATORIO.

I DUE LABORATORI NON SONO DISTINGUIBILI

Per la validità di questo principio non è necessario che valga il principio di INVARIANZA, ma deve valere il principio di COVARIANZA

COVARIANZA E INVARIANZA

COVARIANZA DELLE LEGGI FISICHE

I due membri di una equazione fisica devono essere covarianti passando da un sistema di riferimento a un altro che si muova rispetto al primo di moto traslatorio rettilineo ed uniforme.

⇩

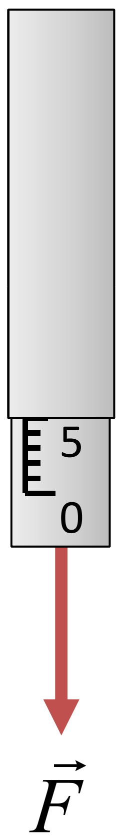
Non è necessario che la misura delle varie grandezze fisiche sia la medesima nei due laboratori. È però importante che le relazioni fra le grandezze fisiche siano le stesse.

INVARIANZA DELLE LEGGI FISICHE

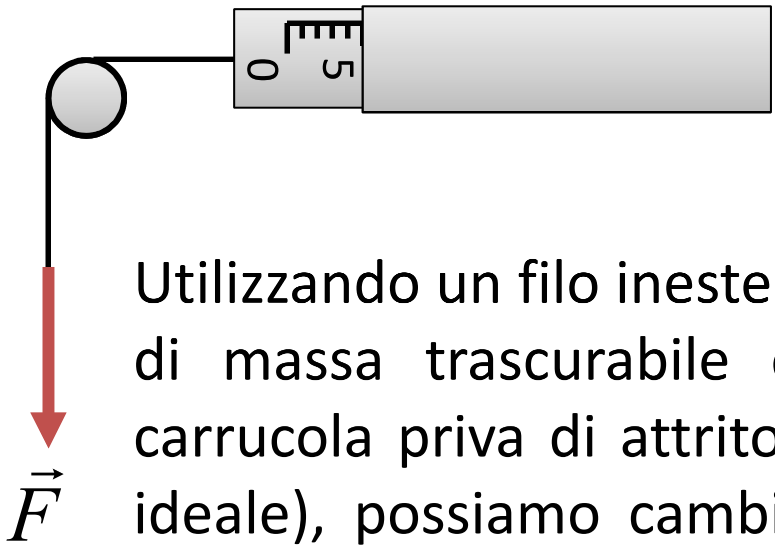
Corrisponde al caso in cui ciascuno dei due membri di un’equazione fisica resti immutato passando da un sistema all’altro.

DEFINIZIONE STATICA DI FORZA

Una forza può essere misurata tramite un **dinamometro**



Un dinamometro a deformazione è una molla tarata.
Il suo estremo deve essere vincolato a un punto fisso.
La taratura viene eseguita attraverso una forza campione.

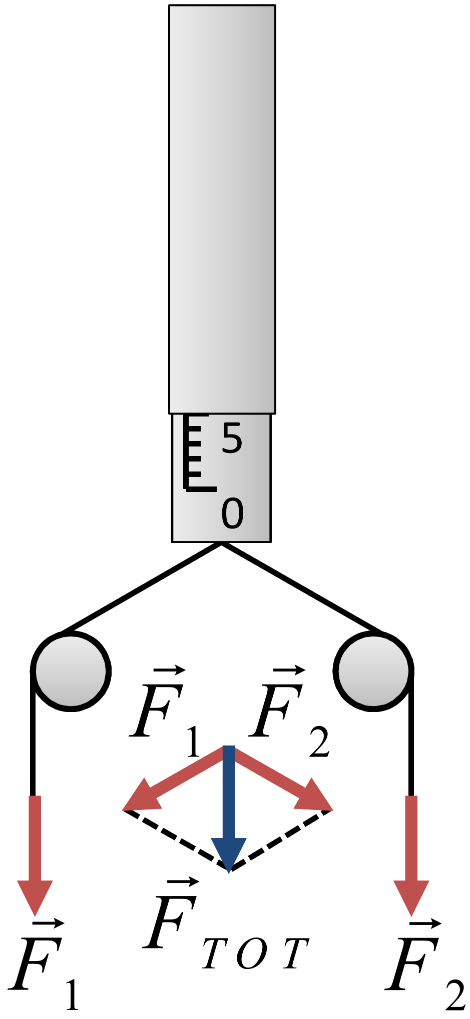


Utilizzando un filo inestensibile di massa trascurabile e una carrucola priva di attrito (caso ideale), possiamo cambiare la direzione di una forza senza variarne il modulo.

Se consideriamo il caso in figura possiamo osservare che, forze applicate nello stesso punto e aventi direzioni diverse, sono equivalenti a una forza risultante ricavabile con la regola del parallelogrammo.

⇩

LE FORZE SONO GRANDEZZE VETTORIALI



SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI

Sono i sistemi di riferimento in cui le leggi della dinamica risultano le più semplici possibili

UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE È DEFINITO DALLA CONDIZIONE CHE IN ESSO UN PUNTO MATERIALE SU CUI NON AGISCE NESSUNA FORZA PERMANE NEL SUO STATO DI QUIETE O MOTO RETTILINEO UNIFORME

$\Rightarrow$ **PER IL PRINCIPIO DI RELATIVITÀ**

$\Downarrow$

SE UN CERTO SISTEMA DI RIFERIMENTO È INERZIALE, ALLORA OGNI ALTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE SI MUOVA RISPETTO AL PRIMO DI MOTO TRASLATORIO RETTILINEO UNIFORME È ANCH'ESSO INERZIALE

PRIMO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

(PRINCIPIO D'INERZIA)

IN UN SRI, UN PUNTO MATERIALE LIBERO CHE ABBIA A UN CERTO ISTANTE UNA VELOCITÀ $\vec{v}$, MANTIENE INDEFINITAMENTE IL SUO STATO DI MOTO RETTILINEO E UNIFORME

Osserviamo che:

- Si basa sul concetto di punto materiale libero
- implica il principio di inerzia, mentre non è vero il contrario
- Introduce il concetto qualitativo di forza
- È strettamente legato al concetto di SRI

FORZA E ACCELERAZIONE

IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE NON SERVE UNA FORZA PER MANTENERE FERMO UN PUNTO MATERIALE NÉ PER MANTENERE INVARIATA LA VELOCITÀ

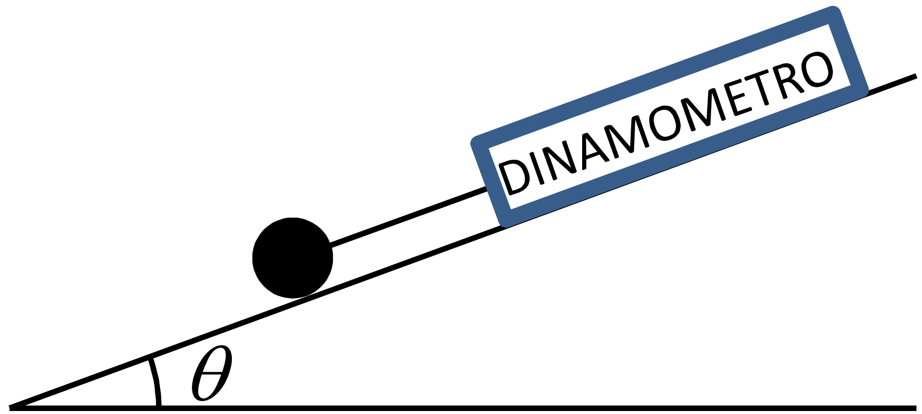
⇩

IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE
FORZA = VARIAZIONE DI VELOCITÀ

⇩

RELAZIONE FRA LA RISULTANTE **F** DELLE FORZE APPLICATE A UN PUNTO E L'ACCELERAZIONE DA ESSO SUBITA

COSTRUIAMO UNA SITUAZIONE SEMPLICE



SI TROVA SPERIMENTALMENTE CHE LA RISULTANTE **F** DELLE FORZE AGENTI (CONDIZIONE STATICA) HA MODULO

$$F = P \sin \theta$$

DOVE *P* È LA FORZA PESO CUI È SOGGETTO IL PUNTO MATERIALE.

ALLORA:

È ragionevole ritenere che tale conclusione possa essere utilizzata anche nel caso dinamico

Variando l'angolo possiamo ottenere diverse valori di intensità della forza

Misuriamo l'accelerazione del punto per valori diversi della forza applicata

⬇

IL PUNTO MATERIALE SUBISCE UN'ACCELERAZIONE PROPORZIONALE AL MODULO DELLA RISULTANTE DELLE FORZE E CON LA SUA STESSA DIREZIONE

$$\vec{F} = m_i \vec{a}$$

MASSA INERZIALE

MASSA INERZIALE E MASSA GRAVITAZIONALE

DALLA RELAZIONE PRECEDENTE RICAVIAMO LA DEFINIZIONE DI **MASSA INERZIALE**

$$m_i = \frac{\vec{F}}{\vec{a}}$$

RICORDIAMO INVECE LA **MASSA GRAVITAZIONALE** È LA GRANDEZZA CHE SI MISURA CON LA BILANCIA (QUALE?)

IL **PESO** È UNA GRANDEZZA CHE, PER DEFINIZIONE, È PROPORZIONALE ALLA MASSA SECONDO LA SEGUENTE RELAZIONE

PESO

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ (9,81 m/s²)

MASSA GRAVITAZIONALE

Dalle relazioni precedenti possiamo scrivere che

$$m\,\vec{g} = m_i\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{m}{m_i}\,\vec{g}$$

Le due masse sono proporzionali e, per far si che l'accelerazione sia indipendente dal corpo considerato, il loro rapporto deve essere una **costante universale** (evidenza sperimentale)

Dato questo risultato possiamo scrivere che

$$\vec{F} = k\,m\,\vec{a}$$

In un sistema inerziale, il prodotto fra l'accelerazione subita da un corpo puntiforme e la massa gravitazionale di quel corpo è proporzionale alla risultante delle forze agenti sul corpo.

SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

ACCELERAZIONE DEFINITA RISPETTO AL SRI

RISULTANTE DELLE FORZE

GRANDEZZA ESTENSIVA

$$\begin{cases} F_x = \sum_i F_{x,i} = m a_x \\ F_y = \sum_i F_{y,i} = m a_y \\ F_z = \sum_i F_{z,i} = m a_z \end{cases}$$

L'unità di misura è il Newton [N], definito come la forza necessaria a imprimere un'accelerazione di $1\ \mathrm{m/s^2}$ a un corpo di massa $1\ \mathrm{kg}$.

Avendo posto $k = 1$, massa inerziale e gravitazionale possono essere equiparate, nonostante siano concettualmente diverse.

TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

(PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE)

AD OGNI AZIONE CORRISPONDE SEMPRE UNA REAZIONE UGUALE E CONTRARIA. LE MUTUE AZIONI DI DUE CORPI SONO SEMPRE UGUALI IN MODULO E DIREZIONE ED HANNO VERSO OPPOSTO.

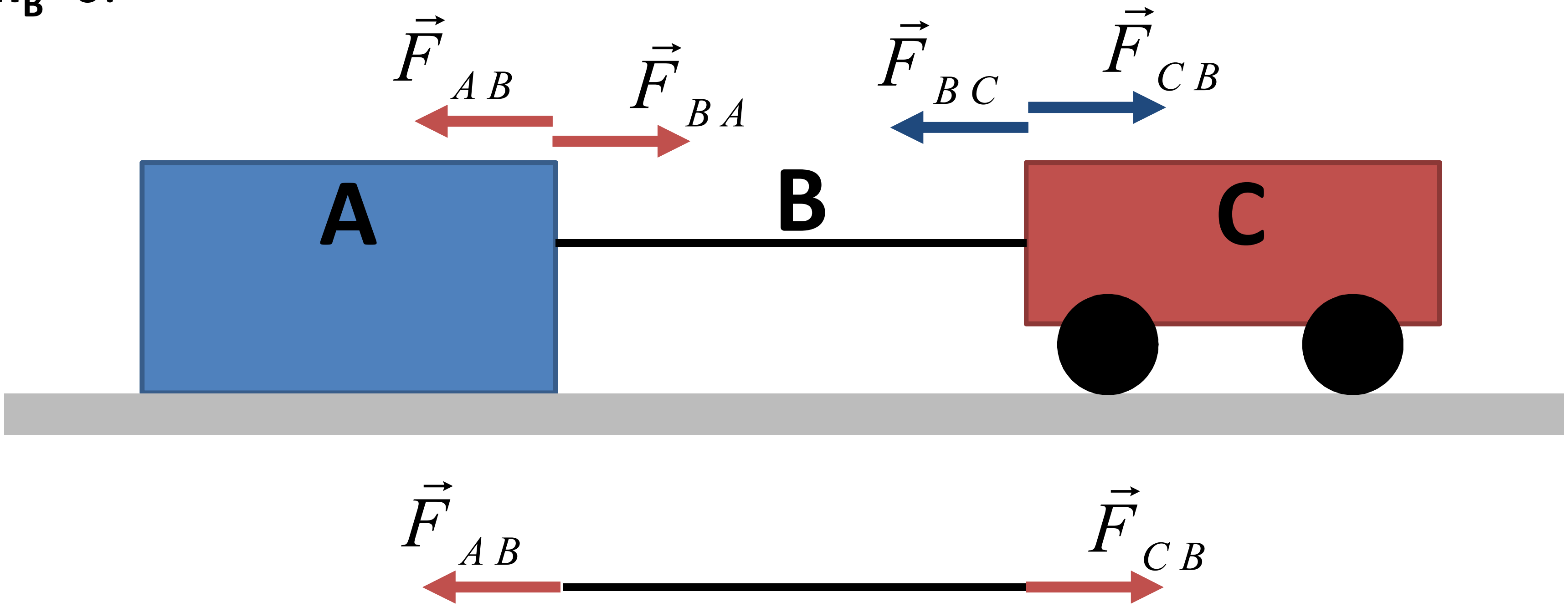
LE FORZE SONO IL RISULTATO DELL'INTERAZIONE CON GLI ALTRI CORPI E TALE INTERAZIONE È SEMPRE RECIPROCA

$$\Downarrow$$

NON ESISTE LA FORZA SINGOLA

Vediamo come rappresentare questo principio

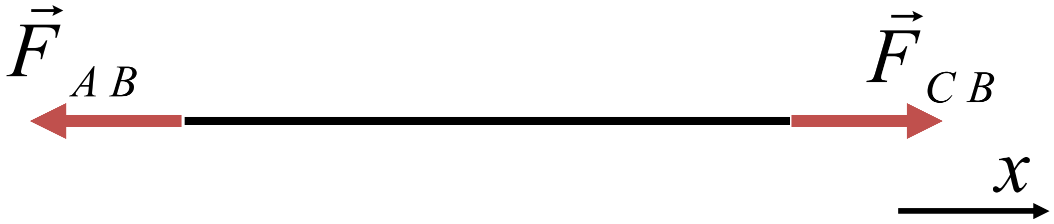
Consideriamo un sistema costituito da un blocco **A**, di massa $\mathbf{m_A}$, trainato da un veicolo **C** tramite una corda inestensibile **B**, di massa $\mathbf{m_B}$=0.



Possiamo distinguere due casi:

- **STATICO**, nel quale non si ha accelerazione (quando si verifica?)
- **DINAMICO**, nel quale è presente un'accelerazione

CASO STATICO



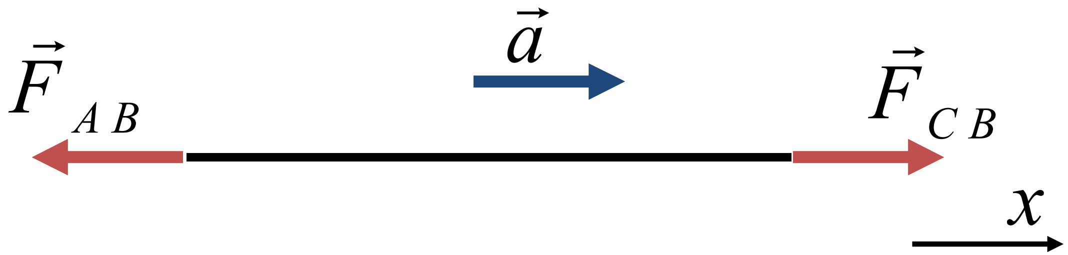
$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} = 0$$

$$\left(F_{AB} + F_{CB}\right) \cdot \hat{x} = 0$$

$$F_{AB} - F_{CB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = F_{CB}$$

È UNA COPPIA AZIONE-REAZIONE

CASO DINAMICO



$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} = m\,\vec{a}$$

$$\left(F_{AB} + F_{CB}\right) \cdot \hat{x} = m\,\vec{a} \cdot \hat{x}$$

$$F_{AB} - F_{CB} = m\,a$$

NON È UNA COPPIA AZIONE-REAZIONE ?

Se il corpo **A** esercita sul corpo **C** una forza uguale e opposta, come può il corpo **A** essere accelerato?

Dobbiamo osservare che:

Le due forze che intervengono nella terza legge di Newton (azione e reazione) agiscono su corpi diversi

Nella seconda legge di Newton si considerano tutte e sole le forze che agiscono sul corpo di massa m

$$\sum_i \vec{F}_i = m\,\vec{a}$$

Se consideriamo il veicolo **C** possiamo dire che le ruote e il suolo, grazie alla presenza di attrito fra loro, esercitano reciprocamente una forza (in accordo con il terzo principio) che consente il moto.

È importante comprendere i “confini” del **sistema fisico** che stiamo considerando per separarlo da ciò che definiamo **ambiente esterno**.

Il sistema in questo caso è composto dal corpo **A**, dalla fune **B** e dal veicolo **C**, quindi il suolo costituisce l’ambiente esterno.

Nel caso dinamico, la forza $\mathbf{F_{CB}}$ è da considerare come **forza esterna** al sistema, che deriva dall’interazione fra le ruote e il suolo.

Il sistema o coppia AZIONE-REAZIONE deve essere quindi considerato come la forza esercitata dalla fune fra il veicolo **C** e il blocco **A**.

SISTEMI DI RIFERIMENTO E FORZE

Parlando dei **SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI** abbiamo affermato che in essi valgono le:

- Trasformazioni di Galileo;
- Leggi della dinamica di Newton.

Abbiamo visto che

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}_0 t$$

e inoltre possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\vec{r}\,' &= x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'} \\ &= \left(x - v_{0,x}t\right)\hat{u}_x + \left(y - v_{0,y}t\right)\hat{u}_y + \left(z - v_{0,z}t\right)\hat{u}_z\end{aligned}$$

Calcoliamo il prodotto scalare con i versori del "sistema mobile"

$$x' = (\hat{u}_{x'} \cdot \hat{u}_x)(x - v_{0,x}t) + (\hat{u}_{x'} \cdot \hat{u}_y)(y - v_{0,y}t) + (\hat{u}_{x'} \cdot \hat{u}_z)(z - v_{0,z}t)$$

$$y' = (\hat{u}_{y'} \cdot \hat{u}_x)(x - v_{0,x}t) + (\hat{u}_{y'} \cdot \hat{u}_y)(y - v_{0,y}t) + (\hat{u}_{y'} \cdot \hat{u}_z)(z - v_{0,z}t)$$

$$z' = (\hat{u}_{z'} \cdot \hat{u}_x)(x - v_{0,x}t) + (\hat{u}_{z'} \cdot \hat{u}_y)(y - v_{0,y}t) + (\hat{u}_{z'} \cdot \hat{u}_z)(z - v_{0,z}t)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \hat{u}_{x'} \cdot \hat{u}_x & \hat{u}_{x'} \cdot \hat{u}_y & \hat{u}_{x'} \cdot \hat{u}_z \\ \hat{u}_{y'} \cdot \hat{u}_x & \hat{u}_{y'} \cdot \hat{u}_y & \hat{u}_{y'} \cdot \hat{u}_z \\ \hat{u}_{z'} \cdot \hat{u}_x & \hat{u}_{z'} \cdot \hat{u}_y & \hat{u}_{z'} \cdot \hat{u}_z \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} x - v_{0,x}t \\ y - v_{0,y}t \\ z - v_{0,z}t \end{pmatrix}$$

$[\mathbf{R}]$ **Matrice di trasformazione**

(di quale tipo?)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{pmatrix} x - v_{0,x}t \\ y - v_{0,y}t \\ z - v_{0,z}t \end{pmatrix}$$

Se gli assi cartesiani dei due sistemi sono paralleli, allora

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' = x - v_{0,x}t \\ y' = y - v_{0,y}t \\ z' = z - v_{0,z}t \end{cases}$$

La matrice di trasformazione si può applicare anche al calcolo della velocità e dell'accelerazione:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{pmatrix} v_x - v_{0,x} \\ v_y - v_{0,y} \\ v_z - v_{0,z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

È importante ricordare che queste relazioni sono valide quando il **moto relativo** fra i due sistemi di riferimento è **rettilineo uniforme**

Sappiamo che la massa è un **invariante scalare**, per cui

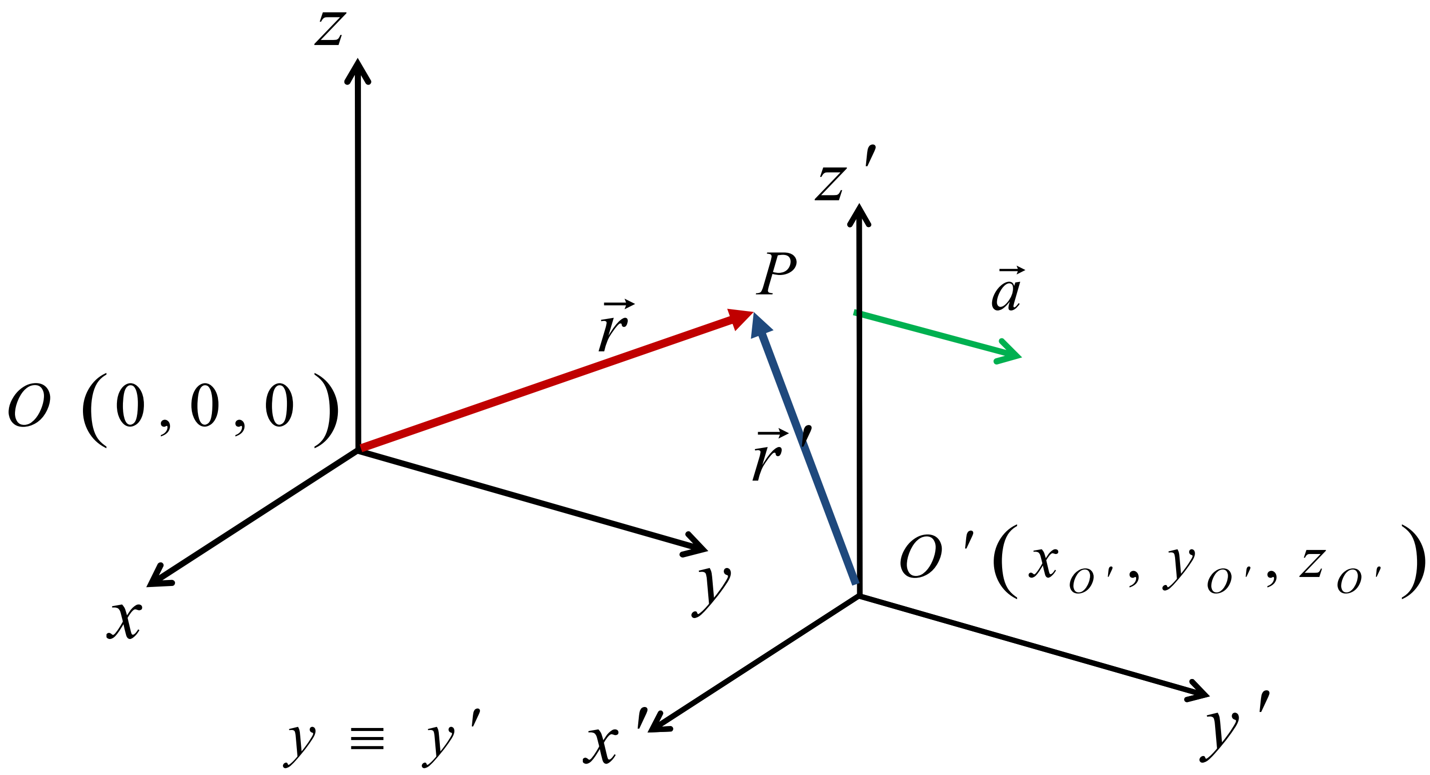
$$m' = m$$

Inoltre, poiché la forza è una grandezza vettoriale, allora si trasforma come un vettore, e abbiamo

$$\begin{pmatrix} F_x' \\ F_y' \\ F_z' \end{pmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

In generale abbiamo **covarianza** del secondo principio di Newton se applichiamo la trasformazione **R**, mentre nel caso di due sistemi in moto rettilineo uniforme fra loro, si ha **invarianza** (per trasformazioni di Galileo) del secondo principio della dinamica.

Se consideriamo **SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI** le precedenti affermazioni non sono più vere.



Se il sistema "mobile" è in moto rispetto a quello "fisso" con accelerazione $\vec{a}$ come nella rappresentazione sopra, allora la velocità di trascinamento **non** è costante.

Se sul punto materiale *P* agisce una forza, nel sistema "fisso" esso obbedisce alla seconda legge di Newton

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

Nel sistema "mobile" dobbiamo scrivere le relazioni viste in precedenza:

$$\begin{cases} x' = x - \boxed{x_{O'}} = x - \boxed{\frac{1}{2} a_x t^2} \\ y' = y - \boxed{y_{O'}} = y - \boxed{\frac{1}{2} a_y t^2} \\ z' = z - \boxed{z_{O'}} = z - \boxed{\frac{1}{2} a_z t^2} \end{cases}$$

Coordinate dell'origine del sistema "mobile"

Derivando si ottengono le espressioni della velocità e dell'accelerazione

$$\begin{cases} v'_x = v_x - \boxed{v_{t,x}} = v_x - \boxed{a_{t,x} t} \\ v'_y = v_y - \boxed{v_{t,y}} = v_y - \boxed{a_{t,y} t} \\ v'_z = v_z - \boxed{v_{t,z}} = v_z - \boxed{a_{t,z} t} \end{cases}$$

Velocità di trascinamento (non costante)

$$\begin{cases} a'_x = a_x - \boxed{a_{t,x}} \\ a'_y = a_y - \boxed{a_{t,y}} \\ a'_z = a_z - \boxed{a_{t,z}} \end{cases}$$

Accelerazione di trascinamento

Riscrivendo in forma vettoriale lo spostamento, la velocità e l'accelerazione, abbiamo che

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \overrightarrow{OO'} \qquad \vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{\mathrm{t}} \qquad \vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_{\mathrm{t}}$$

Rispetto al caso precedente troviamo che l'accelerazione non è invariante

$$\boxed{\vec{a}\,' \neq \vec{a}}$$

Sostituendo l'espressione dell'accelerazione nella seconda legge di Newton

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\left(\vec{a}\,' + \vec{a}_t\right) = m\,\vec{a}\,' + m\,\vec{a}_t$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{F} - \boxed{m\,\vec{a}_t} = m\,\vec{a}\,'$$

Forza di inerzia
(APPARENTE)

Nel caso più generale, di un moto qualunque del sistema "mobile" rispetto a quello "fisso", si ha che

$$\vec{F} - m\,\vec{a}_t - m\,\vec{a}_c = m\,\vec{a}\,'$$

Accelerazione di trascinamento

Accelerazione di Coriolis

In un sistema non inerziale il prodotto fra la massa del punto materiale e l'accelerazione misurata nel sistema "mobile" (quello cioè non inerziale) è uguale alla **FORZA VERA** agente sul punto sommata alle **FORZE APPARENTI**.

Non derivano dalle interazioni fondamentali

QUANTITÀ DI MOTO

Grandezza fisica vettoriale che individua lo stato dinamico del punto materiale ed è definita come prodotto fra la massa e la velocità del punto materiale stesso

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

Dimensioni: $[p] = [M][L]\left[T^{-1}\right]$

Unità di misura: $kg \cdot m \cdot s^{-1} = N \cdot s$

Data la definizione di **quantità di moto** possiamo esprimere la **seconda legge di Newton** in una forma più generale

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

L'azione di una forza produce una variazione nel tempo della quantità di moto del punto.

Se il punto è approssimazione di un corpo "esteso", allora oltre alla variazione della velocità può essere presente anche una variazione della massa.

TEOREMA DELL'IMPULSO

Si ottiene a partire dall'espressione infinitesima

$$\vec{F}\,dt = d\vec{p}$$

Conoscendo l'espressione della forza e integrando fra due istanti di tempo

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \Delta\vec{p}$$

IMPULSO DELLA FORZA

Il **teorema dell'impulso** rappresenta la forma integrale della **seconda legge di Newton**.

Fornisce l'informazione sull'effetto complessivo di una forza applicata a un punto per un intervallo di tempo finito.

Se conosciamo l'espressione della forza, allora possiamo ottenere la variazione della quantità di moto.

Analogamente a quanto accade nella cinematica (spostamento in un certo intervallo di tempo) quando conosciamo la variazione della quantità di moto, possiamo solamente ottenere informazioni sulla forza media applicata.

Quando la risultante delle forze applicate a un punto materiale è nulla, allora si parla di **CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO**.

LAVORO

Il concetto di lavoro si riferisce a una forza (che compie il lavoro) ed è sempre associato a uno spostamento.

Il **lavoro** è una grandezza **scalare** definita dall'**integrale di linea** della forza

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

P_1 e P_2 rappresentano due posizioni.

Dimensioni: $[W] = [M][L^2][T^{-2}]$

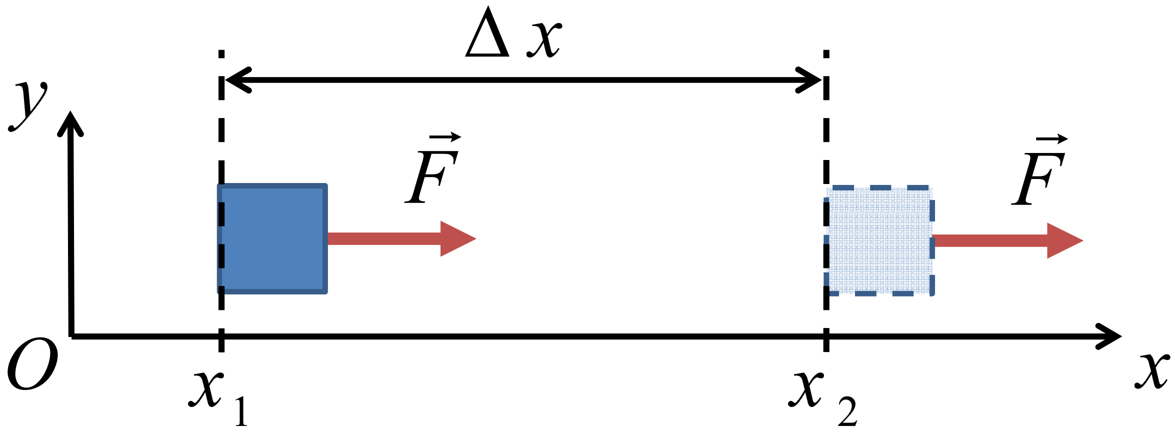
Unità di misura: $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = N \cdot m = J$ **JOULE**

Si noti che, a differenza del Teorema dell'impulso, ora l'integrazione avviene nello spazio (forza che dipende dalla posizione).

Consideriamo il **caso unidimensionale** ed effettuiamo due distinzioni:

1. FORZA COSTANTE

Consideriamo il sistema descritto nel disegno

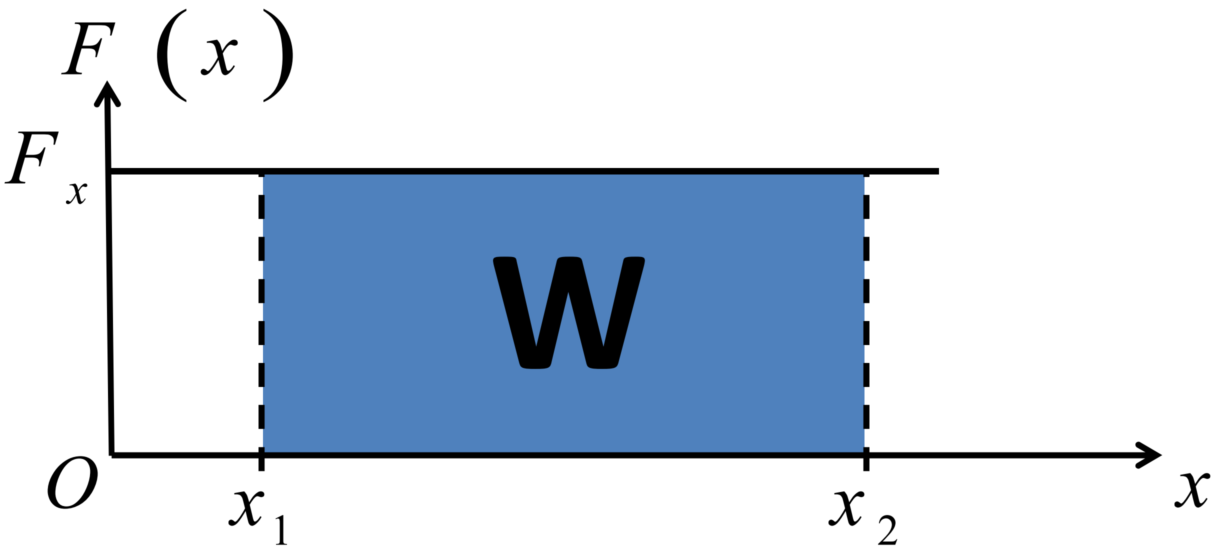


Date le condizioni, si ha:

$$\vec{F} = F_x \qquad\qquad \int_{r_1}^{r_2} d\vec{r} = \Delta x$$

Il lavoro diventa

$$W = F_x \Delta x \begin{cases} > 0 & \theta < \pi/2 \\ = 0 & \theta = \pi/2 \\ < 0 & \theta > \pi/2 \end{cases}$$



2. FORZA VARIABILE

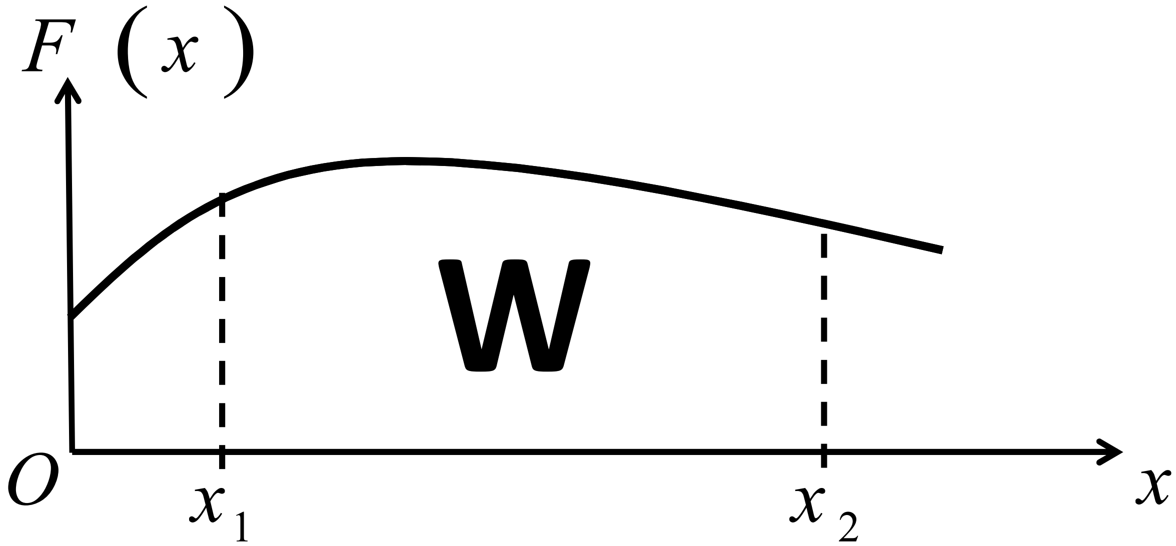
Possiamo prendere come riferimento il disegno precedente, con lo spostamento da x_1 a x_2, però in questo caso la forza è variabile e il lavoro è dato da

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx$$

Se consideriamo i contributi infinitesimi

$$dW = F(x)dx \begin{cases} > 0 & \theta < \pi/2 \\ = 0 & \theta = \pi/2 \\ < 0 & \theta > \pi/2 \end{cases}$$

Anche in questo caso, il lavoro corrisponde all'area sottesa alla curva che rappresenta la forza in funzione della posizione



IMPORTANTE!

Il lavoro complessivo delle forze che agiscono su un punto materiale è uguale al lavoro della forza risultante.

UN CASO PARTICOLARE: LA FORZA ELASTICA

La forza elastica è un esempio di forza che dipende dalla posizione. La direzione è costante e, se consideriamo la forza agente lungo *x*, possiamo scrivere

$$\vec{F} = -kx\hat{u}_x$$

COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA **DEFORMAZIONE**

Calcoliamo il lavoro della forza elastica

$$W = \int_{l_0}^{l} -kx\hat{u}_x \cdot dx\hat{u}_x = -k\int_{l_0}^{l} x\,dx = \frac{1}{2}k\left(l_0^2 - l^2\right)$$

Lunghezza a riposo della molla

ENERGIA CINETICA

Consideriamo l'espressione del lavoro infinitesimo associato a *ds*

$$dW = F_T\, ds = m\, a_T\, ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m\, v\, dv$$

Lega il lavoro infinitesimo alla variazione del modulo della velocità.
Possiamo allora scrivere, per un percorso finito

$$\begin{aligned} W &= \int_i^f m\, v\, dv \\ &= \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \\ &= E_{k,f} - E_{k,i} = \Delta E_k \end{aligned}$$

TEOREMA DELLA ENERGIA CINETICA

QUANTITÀ DI MOTO E ENERGIA CINETICA: OSSERVAZIONI

- La quantità di moto è una grandezza vettoriale, l'energia cinetica è scalare.
- Entrambe dipendono da massa e velocità.
- La variazione della quantità di moto dipende dal tempo per cui agisce la forza risultante (Impulso).
- La variazione dell'energia cinetica dipende dal modulo dello spostamento su cui agisce il risultante delle forze (Lavoro).

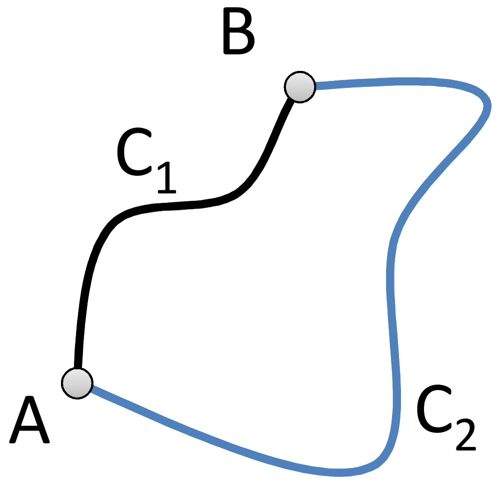
Teorema dell'Impulso e Teorema dell'Energia cinetica sono principi integrali (relazione con intervalli finiti)

Il secondo principio della dinamica è di natura differenziale (relazione tra forza e velocità di variazione della quantità di moto)

FORZE CONSERVATIVE

Si definisce conservativa una forza per la quale **il lavoro compiuto non dipende dal percorso** seguito ma solo dalle posizioni iniziale e finale.

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



Inoltre si ha che

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \quad \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

DEFINISCE UNA FORZA CONSERVATIVA

ENERGIA POTENZIALE

In base a quanto visto per le **forze conservative** possiamo affermare che il lavoro è esprimibile come differenza dei valori che una funzione assume in A e B. Tale funzione, che dipende dalle coordinate è detta **ENERGIA POTENZIALE**.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\Delta E_p$$

A differenza dell'energia cinetica, per l'energia potenziale **non** esiste una espressione generale: essa dipende dalla specifica forza conservativa a cui si riferisce.

Il **legame** con il **lavoro** della **forza conservativa** consente comunque di definire l'**energia potenziale**.

SIGNIFICATO FISICO dell'energia potenziale

Se l'energia potenziale aumenta, il lavoro è negativo e quindi l'ambiente compie lavoro sul sistema

Se l'energia potenziale diminuisce, il lavoro è positivo e quindi il sistema compie lavoro sull'ambiente

Non si può ricavare lavoro da una forza conservativa se il percorso è chiuso.

PROPRIETÀ DELL'ENERGIA POTENZIALE E RELAZIONE CON LA FORZA

- È definita a meno di una costante additiva
- È una funzione scalare
- Esiste solo se il campo è conservativo

Consideriamo l'espressione del lavoro infinitesimo di una forza conservativa e la esprimiamo sotto forma di componenti

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

Per un percorso chiuso

$$\oint \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) = 0$$

Tutte le componenti della forza dipendono da *x*, *y* e *z*. Non essendo dipendenti dal tempo si dice che il campo è **stazionario**.

La precedente proprietà è verificata se e soltanto se esiste una funzione E_p, tale che

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

In altre parole

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}; -\frac{\partial E_p}{\partial y}; -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)$$

La forza è l'opposto del gradiente dell'energia potenziale, quindi:

- Il verso della forza è diretto nella direzione di massima diminuzione dell'energia potenziale;
- Il luogo dei punti dello spazio nei quali l'energia potenziale assume lo stesso valore si chiama **superficie equipotenziale**;
- La forza conservativa associata all'energia potenziale è normale alla superficie equipotenziale in ogni punto.

… IN GENERALE

Data una funzione di più variabili $V = V(x, y, z)$, definiamo:

- Derivate parziali prime

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y=z=\mathrm{cost.}} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{x=z=\mathrm{cost.}} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{x=y=\mathrm{cost.}}$$

- Derivate parziali seconde

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{y=z=\mathrm{cost.}} \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{x=z=\mathrm{cost.}} \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_{x=y=\mathrm{cost.}}$$

- Derivate parziali miste

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_{y=z=\text{cost.}} \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right)_{x=z=\text{cost.}} \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\right)_{x=y=\text{cost.}}$$

Vale il **TEOREMA DI SCHWARTZ**

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\right)$$

Più in generale

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}\right)$$

Definiamo il **DIFFERENZIALE TOTALE**

$$dV(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Abbiamo che

$$\int_A^B dV(x,y,z) = V(B) - V(A)$$

Dipende solo dagli estremi

Tornando al precedente integrale di linea possiamo scrivere

$$W_{AB} = \int_A^B \underbrace{F_x dx + F_y dy + F_z dz}_{\text{Forma differenzaile lineare}}$$

con:

$$\begin{cases} x = x(h) \\ y = y(h) \\ z = z(h) \end{cases}$$

In base a quanto visto, il lavoro dipende solo dagli estremi quando

$$\left.\begin{aligned} F_x(x,y,z) &= \frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y(x,y,z) &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z(x,y,z) &= \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \text{con } V = V(x,y,z)$$

La forza conservativa deve corrispondere al differenziale di una funzione delle coordinate.

➡ La forma differenziale lineare si dice **DIFFERENZIALE ESATTO**

Questa condizione non è verificata per una *F* qualunque, ma devono sussistere delle condizioni particolari.

Calcoliamo le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}}$$

Devono essere uguali per il
Teorema di Schwartz

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \; ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \; ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il campo sia **CONSERVATIVO**

PROBLEMA DIRETTO

Calcolo della forza a partire dal potenziale

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

PROBLEMA INVERSO

Calcolo del potenziale a partire dalla forza

$$V(x, y, z) = \int_A^{P(x,y,z)} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) + \boxed{V(x_A, y_A, z_A)}$$

Costante additiva

DUE ESEMPI NOTEVOLI

Avevamo visto il caso della forza elastica:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\hat{u}_x = -kx\hat{u}_x$$

Consideriamo anche il caso dell'energia potenziale gravitazionale

$$E_p = mgh \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\hat{u}_z = -mg\hat{u}_z$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Abbiamo visto che:

$$W_{AB} = V(B) - V(A)$$

$$W_{AB} = \sum_{i=1,n} W_i = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$W_{AB} = E_{k,B} - E_{k,A} = V(B) - V(A)$$

$$\Rightarrow E_{k,B} - V(B) = E_{k,A} - V(A)$$

Definiamo:

$$E_p(x,y,z) = -V(x,y,z)$$

PER UN SISTEMA CHE SI MUOVE SOTTO L'AZIONE DI <u>SOLE FORZE CONSERVATIVE</u>, L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA

$$E_{k,fin} + E_{p,fin} = E_{k,in} + E_{p,in}$$

La somma di energia cinetica e potenziale nello stato iniziale è uguale alla somma di queste energie nello stato finale

$$\Rightarrow \boxed{E_k + E_p = E_m = \text{cost.}}$$

ENERGIA CINETICA **ENERGIA MECCANICA**

ENERGIA POTENZIALE

QUALCOSA IN PIÙ SULL'ENERGIA POTENZIALE

Quando è presente un campo di forze conservativo possiamo costruire una funzione

$$E_p = E_p(x, y, z)$$

tale che il lavoro compiuto dalle forze del campo per portare un punto materiale da un punto **A** ad un punto **B** è:

$$W_{AB} = V_B - V_A = \Delta V = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$\Rightarrow \quad E_{p,A} = E_{p,B} + W_{AB}$$

Come si definisce operativamente l'energia potenziale?

DEFINIZIONE OPERATIVA DELL'ENERGIA POTENZIALE

Dobbiamo scegliere un riferimento iniziale, al quale assegniamo il valore $E_{p,O}$. Quindi, per un generico punto *X*

$$E_{p,X} = \boxed{E_{p,O}} + \boxed{W_{XO}}$$

Il punto di riferimento si sceglie in modo conveniente: di solito dove la forza si annulla.

Lavoro compiuto dalle forze del campo sul punto materiale quando esso si muove da *O* a *X*.

$$E_{p,A} = E_{p,O} + W_{AO} \qquad E_{p,B} = E_{p,O} + W_{BO}$$

$$\Rightarrow \quad E_{p,A} - E_{p,B} = W_{AO} - W_{BO}$$

$$= W_{AO} + W_{OB} = W_{AB}$$

ENERGIA MECCANICA E FORZE NON CONSERVATIVE

Abbiamo visto che nel **caso ideale**, quando agiscono solo forze conservative su **un punto materiale**

$$\sum_i W_{AB,i} = \Delta E_k = -\sum_i \Delta E_{p,i}$$

da cui

$$\Delta E_k + \sum_i \Delta E_{p,i} = \Delta E_m = 0$$

Nel **caso reale** agiscono anche forze <u>non</u> conservative e quindi

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{R}_c \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{R}_{nc} \cdot d\vec{s}$$

$$= W_{c,AB} + W_{nc,AB}$$

Quindi la variazione dell'energia meccanica è data da:

$$\Delta E_m = \Delta E_k + \sum_i \Delta E_{p,i} = W_{nc}$$

In presenza di forze **non conservative**, l'energia meccanica del sistema **non** si conserva. Possono sussistere i seguenti casi:

$W_{nc} < 0$ ⇨ La forza è dissipativa (o resistente)

$$\Delta E_m < 0 \qquad E_{fin} < E_{in}$$

$W_{nc} > 0$ ⇨ La forza è attiva (o motrice)

$$\Delta E_m > 0 \qquad E_{fin} > E_{in}$$

LA POTENZA

La **potenza *P*** erogata in un certo istante da un campo di forze che compie lavoro su un punto materiale è il **rapporto**, in quell'istante, **tra** il **lavoro** e il **tempo** in cui esso è stato svolto.

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad [\mathrm{W}] = \left[\frac{\mathrm{J}}{s} \right]$$

LAVORO MEDIO **LAVORO ISTANTANEO** **UNITÀ DI MISURA**

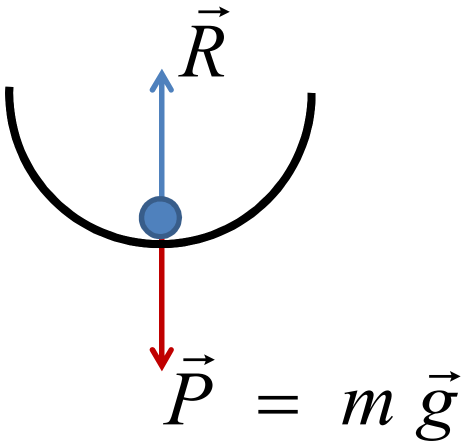
Per un punto materiale:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

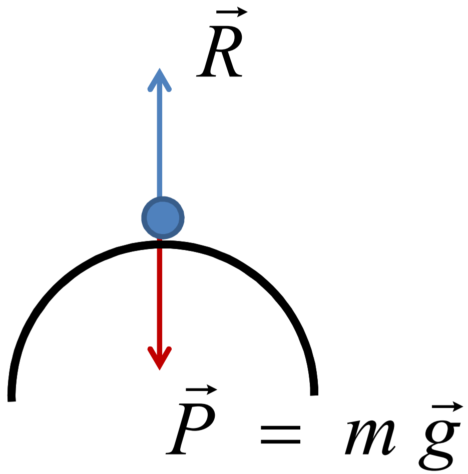
La potenza che agisce su un punto materiale in movimento ad un certo istante è uguale al prodotto scalare fra il risultante delle forze che agiscono sul punto e la sua velocità.

EQUILIBRIO DI UN PUNTO MATERIALE E ENERGIA POTENZIALE

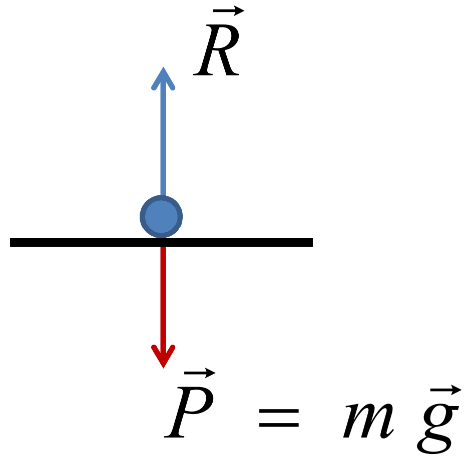
La condizione dinamica di equilibrio per un punto materiale si verifica quando il risultante delle forze agenti su esso è nulla. Questa condizione è però poco adatta alla descrizione di alcuni casi di interesse pratico.



EQUILIBRIO STABILE



EQUILIBRIO INSTABILE

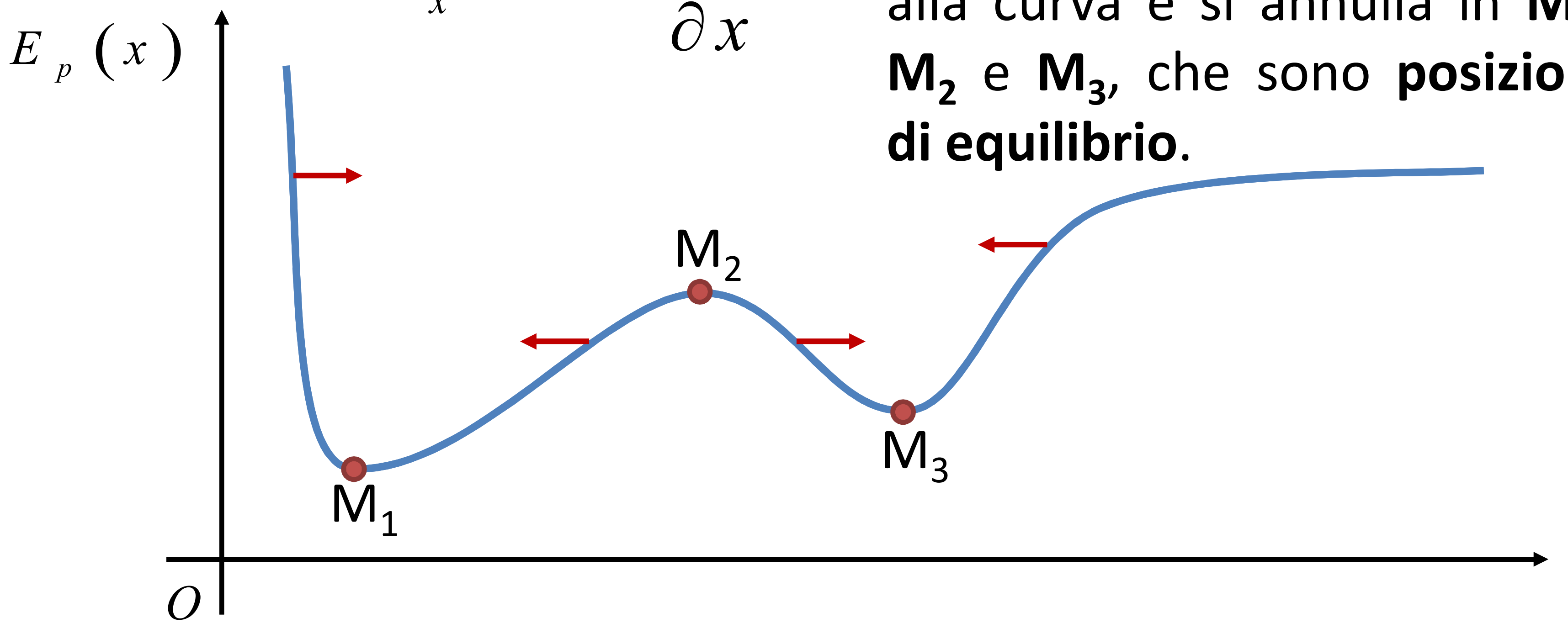


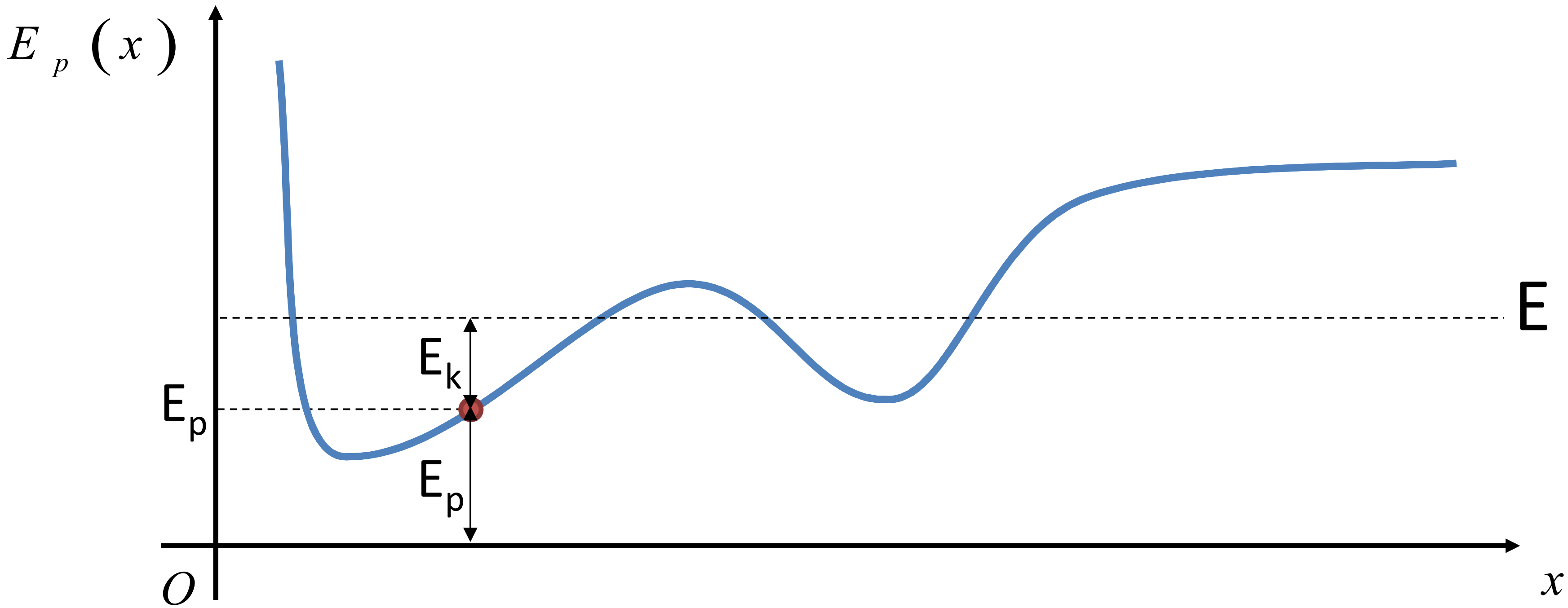
EQUILIBRIO INDIFFERENTE

Per un punto materiale in un campo di forze conservativo gli stati di equilibrio si possono individuare in base all'andamento dell'energia potenziale.
Consideriamo per semplicità un punto materiale che si muove su una traiettoria definita, in modo da ottenere un sistema con un solo grado di libertà. Allora abbiamo:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

La forza coincide con la pendenza della retta tangente alla curva e si annulla in **M_1**, **M_2** e **M_3**, che sono **posizioni di equilibrio**.

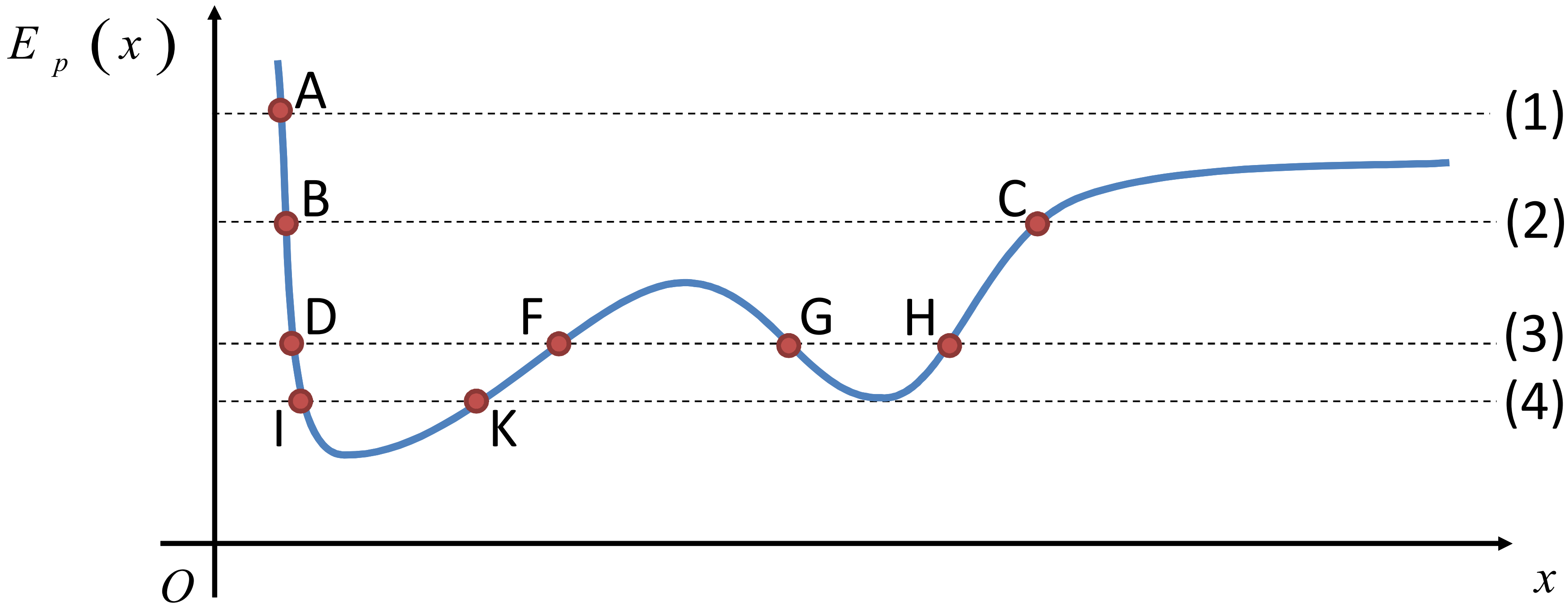




Per un punto materiale di energia totale E:

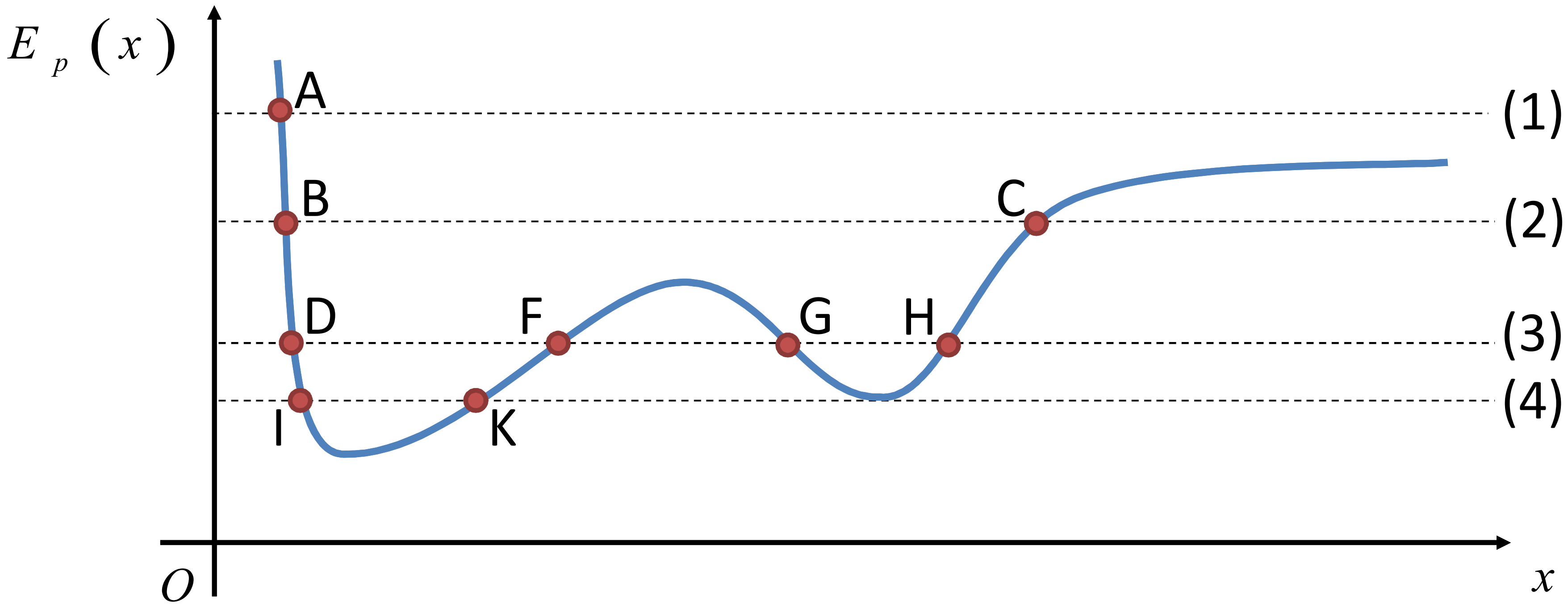
- In ogni posizione *x*, l'energia potenziale corrisponde all'ordinata della curva;
- La differenza rispetto a E coincide con E_k.

Dall'analisi della curva dell'energia potenziale possiamo effettuare delle considerazioni sul moto.



Consideriamo le 4 linee tratteggiate che indicano altrettanti livelli energetici:

1) Moto non oscillatorio tra **A** e **infinito**;
2) Moto oscillatorio tra **B** e **C**;
3) Ci sono due possibilità:
   - Moto oscillatorio tra **D** e **F**;
   - Moto oscillatorio tra **G** e **H**.



Nel caso del livello energetico (3) è impossibile passare da una regione all’altra (barriera di potenziale).

4) Moto oscillatorio fra **I** e **K**.

MOMENTO MECCANICO DELLA FORZA

Il momento della forza è definito come

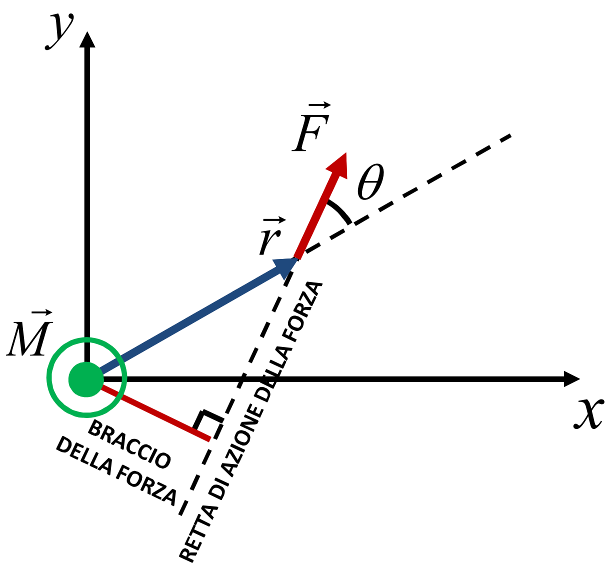
$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad [\mathrm{N\,m}]$$

Direzione e verso del momento della forza sono definiti con la regola della mano destra, mentre il modulo è dato da

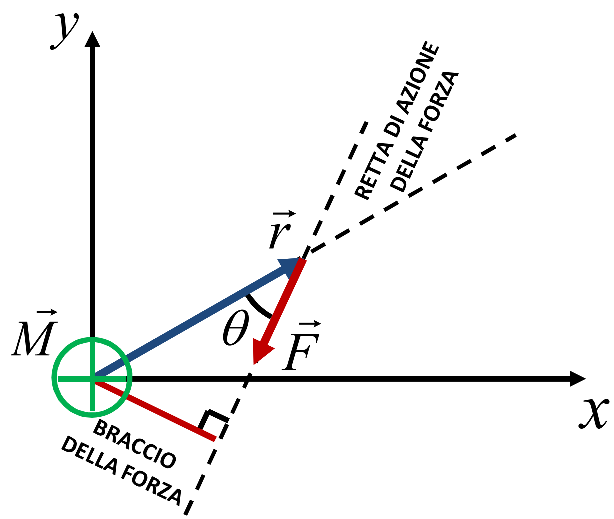
$$M = rF \sin\theta$$

<u>RAPPRESENTA L'ANALOGO ROTAZIONALE DELLA FORZA</u>

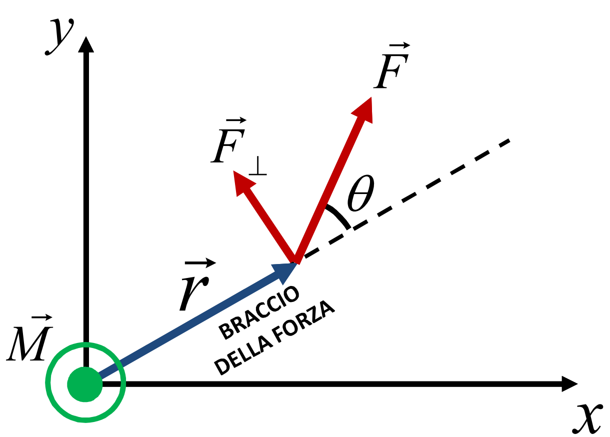
Possiamo rappresentare graficamente i tre vettori coinvolti nel prodotto vettoriale evidenziando anche la retta di azione e il braccio della forza.



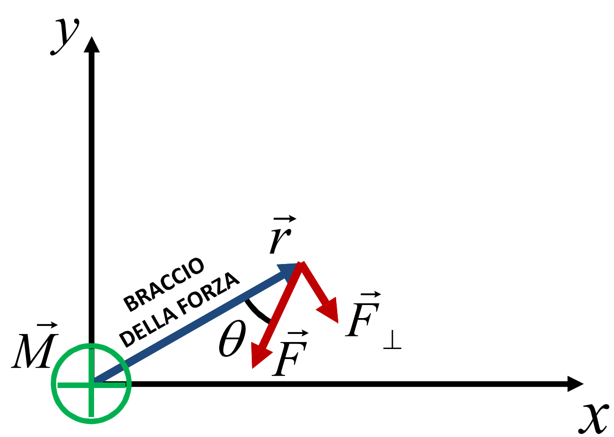
CASO 1: MOMENTO USCENTE DAL PIANO – CONSIDERIAMO **F** E LA COMPONENTE DI **r** PERPENDICOLARE ALLA DIREZIONE DI AZIONE DELLA FORZA.



CASO 2: MOMENTO ENTRANTE NEL PIANO – CONSIDERIAMO **F** E LA COMPONENTE DI **r** PERPENDICOLARE ALLA DIREZIONE DI AZIONE DELLA FORZA.



CASO 3: MOMENTO USCENTE DAL PIANO – CONSIDERIAMO **r** E LA COMPONENTE DI **F** PERPENDICOLARE ALLA DIREZIONE DEL BRACCIO DELLA FORZA.

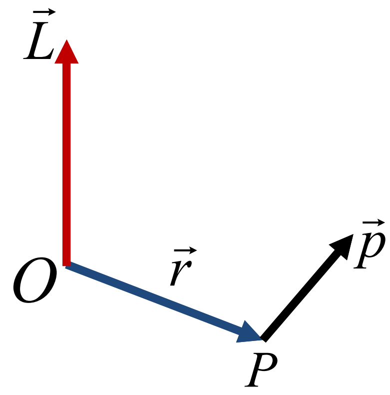


CASO 4: MOMENTO ENTRANTE NEL PIANO – CONSIDERIAMO **r** E LA COMPONENTE DI **F** PERPENDICOLARE ALLA DIREZIONE DEL BRACCIO DELLA FORZA.

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Il momento della quantità di moto, o **momento angolare**, è dato da

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$



Se cambiamo il polo in O', allora abbiamo che

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}$$

Inoltre, si osservi che il momento angolare dipende solo dalla componente trasversale della velocità.

<u>RAPPRESENTA L'ANALOGO ROTAZIONALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO</u>

Studiamo la derivata temporale del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}}}_{\vec{v}} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m \underbrace{\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}}}_{\vec{a}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{=0} + \underbrace{\vec{r} \wedge m\vec{a}}_{=\vec{M}}$$

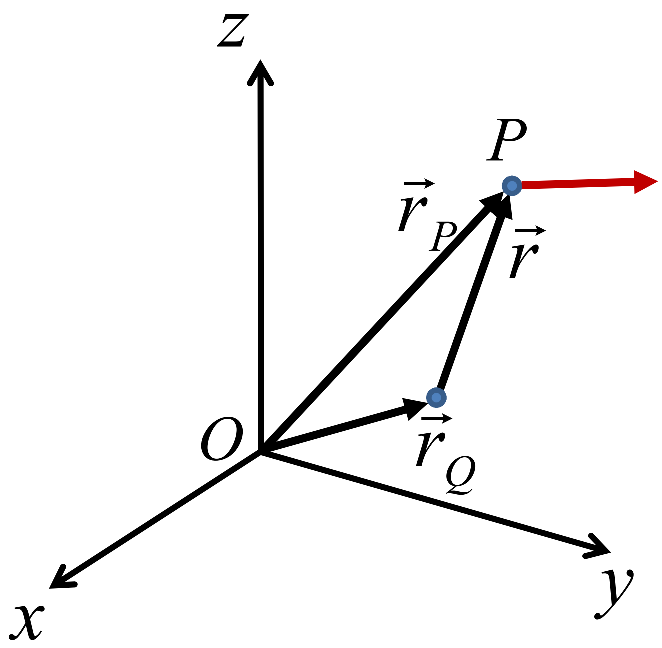
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \left[\mathrm{N\,m\,s^{-1}}\right]}$$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

In un **Sistema di riferimento inerziale**, se si sceglie come polo un **punto fisso** o che si muove con **velocità parallela alla quantità di moto**, il momento della forza risultante agente su un punto materiale è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare del punto materiale stesso.

Se il polo non rispetta le condizioni richieste?

Consideriamo un punto materiale *P* che si muove in un SDRI rispetto al quale ha una quantità di moto e scegliamo un punto *Q* come polo.
Il momento angolare di *P* rispetto a *Q* è:



$$\vec{L}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Deriviamo rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \boxed{\vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}} \rightarrow \vec{M}_Q$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_Q = \frac{d\vec{L}_Q}{dt} - \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}} \wedge \vec{p}$$

Con riferimento al sistema descritto nella figura precedente, si ha:

$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q$$

Quindi, il momento rispetto a *Q* diventa

$$\vec{M}_Q = \frac{d\vec{L}_Q}{dt} - \left(\vec{v}_P - \vec{v}_Q\right) \wedge \vec{p}$$

$$= \frac{d\vec{L}_Q}{dt} + \boxed{\vec{v}_Q \wedge \vec{p}} - \underbrace{\vec{v}_P \wedge \vec{p}}_{=0}$$

Questo termine si annulla solo se *Q* è fisso o si muove parallelamente a *P*.

Ritorniamo al **Teorema del momento angolare** e consideriamo il caso in cui

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Il risultante delle forze è nullo oppure è parallelo a ***r***.

Inoltre abbiamo che

$$d\vec{L} = \vec{M}\,dt$$

Integrando si ha

$$\int_0^t \vec{M}\,dt = \Delta\vec{L} = \vec{L}_{fin} - \vec{L}_{in}$$

Analogamente al teorema dell'impulso, per ottenere una variazione del momento angolare occorre applicare, per un certo tempo, il momento di una forza.

Inoltre, se il momento della forza agisce per un tempo breve il vettore posizione si può considerare costante, quindi si ha:

$$\int_0^t \vec{M}\,dt = \vec{r} \wedge \int_0^t \vec{F}\,dt = \vec{r} \wedge \vec{I} = \Delta \vec{L}$$

Teorema del momento dell'impulso

La variazione del momento angolare è uguale al momento dell'impulso dell'impulso applicato al punto.

Per il lavoro in un moto circolare si ha

$$W_{AB} = \int_A^B F_T\,ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} F_T\,r\,d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M\,d\theta$$

DINAMICA DEI SISTEMI

Dopo aver parlato di cinematica e dinamica del punto materiale, ora ci occupiamo di sistemi di punti discreti (costituiti da più punti materiali) e di sistemi continui.

Per un sistema di **n** punti che interagiscono fra loro e con l'ambiente si ha che

$$\boxed{\vec{F}_i} = \boxed{\vec{F}_i^{(E)}} + \boxed{\vec{F}_i^{(I)}} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Forza agente sullo *i-esimo* punto

Risultante delle forze esterne agenti sullo *i-esimo* punto

Risultante delle forze interne al sistema (*n-1 punti*) agenti sullo *i-esimo* punto

E quindi anche

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Queste rappresentano *n* equazioni differenziali (quante scalari?) e quindi il problema può essere affrontato con questo metodo al massimo se *n=2*. Per *n>2* la risoluzione delle equazioni diventa molto complessa e poco vantaggiosa.

Possiamo riscrivere le relazioni viste in precedenza:

$$\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$ II Principio della dinamica

$$\vec{M}_i^{(E)} + \vec{M}_i^{(I)} = \frac{d\vec{L}_i}{dt} + \vec{v}_Q \wedge \vec{p}_i$$ Eq. Momento angolare

$$\vec{W}_i^{(E)} + \vec{W}_i^{(I)} = E_{k,i}(f) - E_{k,i}(i)$$ Th. Energia Cinetica

La seconda e terza equazione sono ottenibili dalla prima.

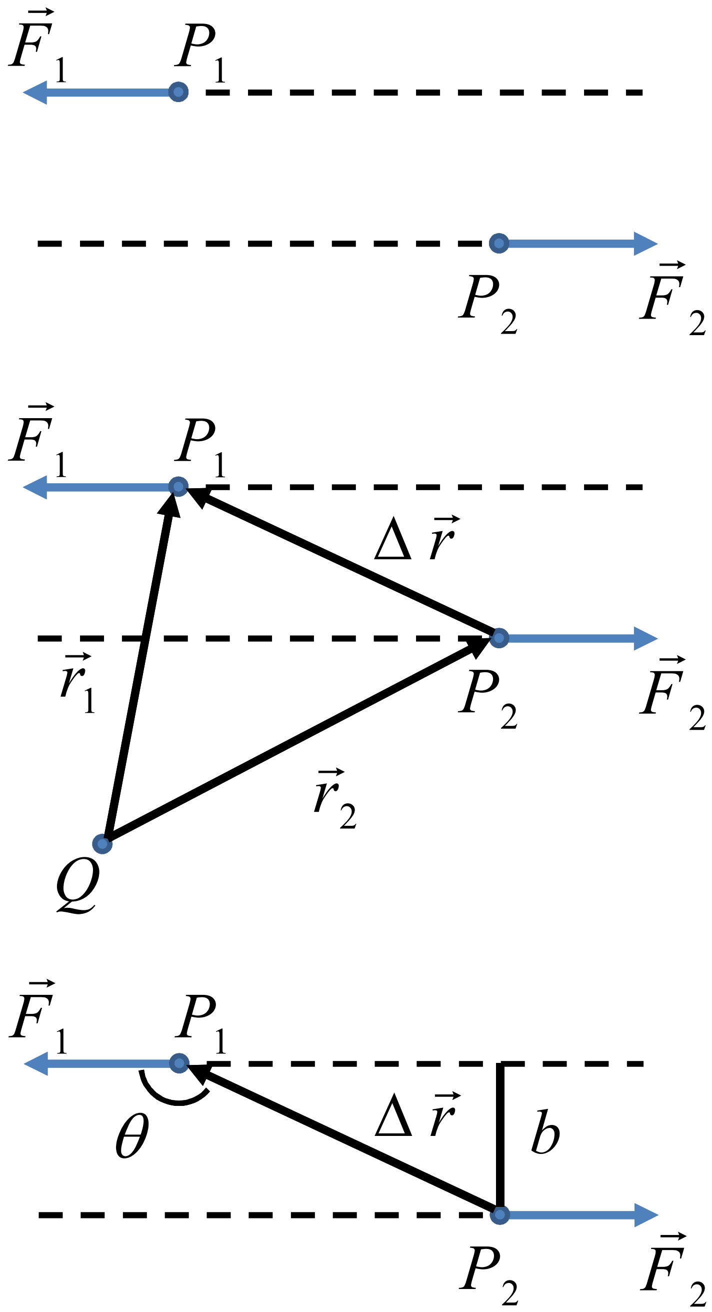
Sommando su tutti i punti ricaviamo le 3 **equazioni fondamentali della dinamica**:

$$\vec{F}^{(E)} + \vec{F}^{(I)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$ II Principio della dinamica

$$\vec{M}^{(E)} + \vec{M}^{(I)} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{v}_Q \wedge \vec{p}$$ Eq. Momento angolare

$$\vec{W}^{(E)} + \vec{W}^{(I)} = E_{k,f} - E_{k,i}$$ Th. Energia Cinetica

Notiamo che seconda e terza equazione ora sono **indipendenti** dalla prima perché sia per ricavare il momento complessivo, sia per calcolare il lavoro totale, occorre conoscere i singoli contributi e sommarli.

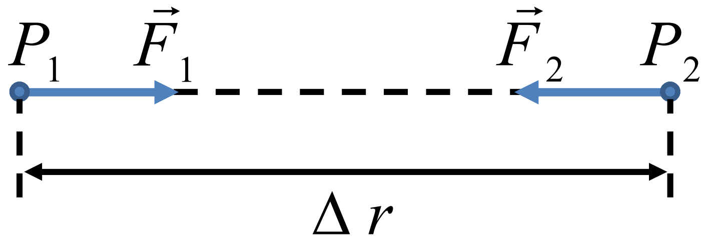


$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Il momento del risultante è nullo, qualsiasi sia il punto di applicazione di *F* e qualunque sia il polo rispetto al quale si calcola il momento. Però, non è nullo il momento risultante

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \\ &= \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 \\ &= \Delta\vec{r} \wedge \vec{F}_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad M = \Delta r F_1 \sin\theta = b F_1$$



Risultante delle forze e momento risultante sono nulli.

$$W = W_1 + W_2 = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow \quad W = F r_1 + F r_2 = F \Delta r$$

Si nota che il lavoro **non** è nullo.

In un **sistema di riferimento inerziale**, la **quantità di moto totale** e il **momento angolare totale** rispetto a un **polo fisso** di un **sistema libero** **si conservano**.

Non sottoposto a sollecitazioni esterne $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{F}^{(E)} = 0 \\ \vec{M}^{(E)} = 0 \end{cases}$$

Sotto queste condizioni le equazioni della dinamica diventano:

$$\vec{F}^{(I)} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{M}^{(I)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Dal terzo principio deriva che:

$$\vec{F}^{(I)} = 0 \qquad \vec{M}^{(I)} = 0$$

Questa relazione ha validità generale.

CENTRO DI MASSA

È un punto geometrico con proprietà particolari e importanti:

1. Il suo moto è il medesimo di un punto materiale di massa pari a quella dell'intero sistema e soggetto alle stesse forze;
2. È unico.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Vettore posizione del CM

Coordinate del Centro di Massa

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

CM PER UN SISTEMA ESTESO

Quando il sistema non è costituito da punti materiali ma è "continuo", dobbiamo considerare la densità del materiale che lo costituisce e il suo volume. Si ha:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\rho\,dV$$

Se la densità è costante

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Anche in questo caso si possono ricavare le coordinate del CM

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Ricapitolando, per un sistema costituito da *n* punti, abbiamo che:

$$M\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{p}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(E)}$$ **Teorema del CM**

Se il risultante delle forze esterne è nullo, la quantità di moto si conserva (generalizza il caso del singolo punto materiale). Osserviamo che:

- La quantità di moto dipende dal S.d.R. ma non la sua conservazione;
- La quantità di moto totale può essere variata solo da forze esterne;
- Le forze interne possono influenzare la quantità di moto dei singoli punti materiali ma non quella totale.

Riprendiamo l'equazione del momento angolare

$$\vec{M}^{(E)} + \vec{M}^{(I)} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \boxed{\vec{v}_Q \wedge \vec{p}}$$

$$= 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \vec{v}_Q = 0 \\ \vec{v}_Q \parallel \vec{p} \\ \vec{r}_Q = \vec{r}_{CM} \end{cases}$$

Per il terzo principio della dinamica e nel caso in cui il polo sia fisso o coincidente con il CM, si ottengono le seguenti

$$\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Si tratta di un sistema di riferimento generalmente **non** inerziale

(forze apparenti), per il quale :

- l'origine è collocata nel centro di massa
- non si hanno rotazioni degli assi rispetto al sistema inerziale.

In base a quanto visto per i moti relativi, se consideriamo il sistema di riferimento del CM come sistema "mobile", si ha per posizione e velocità:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{r}_{CM}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i{}' + \vec{v}_{CM}$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo, per definizione:

$$\vec{r}\,'_{CM} = 0 \qquad \vec{v}\,'_{CM} = 0 \qquad \vec{a}\,'_{CM} = 0$$

E quindi

$$\sum_i m_i \vec{r}_i\,' = 0 \qquad \sum_i m_i \vec{v}_i\,' = 0 \qquad \sum_i m_i \vec{a}_i\,' = 0$$

Ne consegue che nel sistema di riferimento del CM **la quantità di moto totale è nulla**.

Il momento risultante delle forze, calcolato rispetto al CM è:

$$\vec{M}\,'^{(E)} = \sum_i \vec{r}_i\,' \wedge \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{r}_i\,' \wedge \vec{F}_i^{(I)} - \sum_i \vec{r}_i\,' \wedge m_i \vec{a}_{CM}$$

$$= \vec{M}\,'^{(E)} - \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\,' \right)}_{=0} \wedge \vec{a}_{CM}$$

NESSUN CONTRIBUTO DELLE FORZE D'INERZIA

Considerando la validità delle equazioni cardinali anche se il polo passa per il CM del sistema, possiamo scrivere che:

$$\vec{M}^{(E)} = \sum_i \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i^{(E)} = \vec{M}'^{(E)}$$

Quindi, se ricaviamo nel sistema inerziale il momento angolare rispetto al CM, abbiamo

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i \\
&= \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_{CM} \\
&= \vec{L}' + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i' \right)}_{=0} \wedge \vec{v}_{CM} = \vec{L}'
\end{aligned}$$

Il valore del momento angolare, calcolato rispetto al centro di massa, corrisponde nei due sistemi di riferimento, “fisso” e “mobile”.

Come conseguenza delle ultime due uguaglianze trovate, possiamo scrivere la seguente relazione:

$$\vec{M}\,'^{(E)} = \frac{d\vec{L}\,'}{dt}$$

Il teorema del momento angolare è valido anche nel sistema di riferimento del centro di massa, se il polo coincide con esso. Inoltre, nel calcolo non si considerano le forze d’inerzia (che possono essere presenti perché il sistema del CM non è inerziale).

SISTEMI DI PUNTI E SISTEMI DI RIFERIMENTO: MOMENTO ANGOLARE

Consideriamo il SRI e assumiamo la sua origine come polo. Allora,

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \\
&= \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \wedge m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) \\
&= \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i' + \underbrace{\left(\sum_i \vec{r}_i' m_i \right)}_{=0} \wedge \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i'}_{=0} + \vec{r}_{CM} \wedge \vec{v}_{CM} \sum_i m_i
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i' + \vec{r}_{CM} \wedge \underbrace{M \vec{v}_{CM}}_{\vec{P}} = \boxed{\vec{L}'} + \boxed{\vec{L}_{CM}}
$$

1° TEOREMA DI KöNIG

MOMENTO ANGOLARE DEL SISTEMA RISPETTO AL CM ($\vec{L}'$)

MOMENTO ANGOLARE DOVUTO AL MOTO DEL CM ($\vec{L}_{CM}$)

SISTEMI DI PUNTI E SISTEMI DI RIFERIMENTO: ENERGIA CINETICA

Consideriamo il SRI e scriviamo l'espressione di E_k, tenendo conto della relazione che lega la velocità del punto nel SRI e nel SRCM:

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i \overbrace{(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')^2}^{\vec{v}_i^2}$$

$$= \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 + m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM}$$

Sommando sull'indice *i* troviamo l'energia cinetica totale del sistema

$$E_k = \boxed{\frac{1}{2} \vec{v}_{CM}^2 \sum m_i} + \boxed{\frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i'^2} + \boxed{\vec{v}_{CM} \cdot \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i'}_{=0}}$$

ENERGIA CINETICA DEL CENTRO DI MASSA

ENERGIA CINETICA RISPETTO AL CENTRO DI MASSA

TERMINE NULLO

$$E_k = \boxed{\frac{1}{2}M\vec{v}_{CM}^2} + \boxed{E'_k}$$

2° TEOREMA DI KöNIG

ENERGIA CINETICA DEL MOTO DEL CM

ENERGIA CINETICA INTERNA
Moto attorno al centro di massa

In un sistema di riferimento inerziale qualunque, l'energia cinetica di un sistema materiale può essere espressa coma somma dell'energia cinetica che il sistema avrebbe se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di massa (**ENERGIA CINETICA DEL MOTO DEL CM**), più l'energia cinetica che il sistema ha in un sistema di riferimento con origine nel centro di massa e orientamento fisso (**ENERGIA CINETICA INTERNA**).

SISTEMI DI PUNTI E ENERGIA

Il calcolo del lavoro per un sistema di punti deve tenere conto anche del contributo delle forze interne, quindi si ha che

$$W = W^{(E)} + \boxed{W^{(I)}}$$

$$\vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{j,i} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{i,j} \cdot d\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right) = \vec{F}_{i,j} \cdot \underbrace{d\vec{r}_{i,j}}_{\neq 0}$$

Il lavoro delle forze interne è legato alla variazione della distanza fra i punti del sistema: le forze interne possono cambiare la geometria.

Il teorema dell'energia cinetica nel caso di un sistema di punti materiali diventa:

$$W^{(E)} + W^{(I)} = \Delta E_k$$

Inoltre, se agiscono forze conservative l'energia meccanica si conserva. Essa però può non conservarsi per un sistema di punti, anche se isolato.

QUANTITÀ DI MOTO

Grandezza fisica vettoriale caratteristica del moto di traslazione.

Si indica con il simbolo **p** e ha unità di misura **kg m s^{-1}**

$$\vec{P} = m\,\vec{v}$$

Un corpo fermo ha quantità di moto nulla, mentre uno in movimento può averla sia positiva sia negativa.

È una proprietà **globale** di un sistema fisico

La quantità di moto passa da un corpo ad un altro e può quindi essere scambiata

La quantità di moto non può essere creata

Un corpo fermo si muove:

- Se riceve della quantità di moto
- Se cede della quantità di moto contraria

La quantità di moto nulla di un sistema costituito da due corpi deriva dal fatto che viene scambiata quantità di moto uguale e opposta fra i due corpi

La quantità di moto non si può annichilare

Un corpo in moto si ferma:

- Se cede la sua quantità di moto a un altro
- Se riceve della quantità di moto contraria

La Quantità di Moto di un sistema isolato è costante

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

Viceversa,

se la quantità di moto totale è costante, il sistema è isolato.

La Quantità di Moto di un sistema non isolato **non** è costante

$$\vec{p}_{\mathrm{in}} \neq \vec{p}_{\mathrm{fin}}$$

La quantità di moto passa naturalmente (senza interventi esterni) dal corpo alla velocità maggiore a quello alla velocità minore

La quantità di moto passa artificialmente (con interventi esterni) dal corpo alla velocità minore a quello alla velocità maggiore

URTI

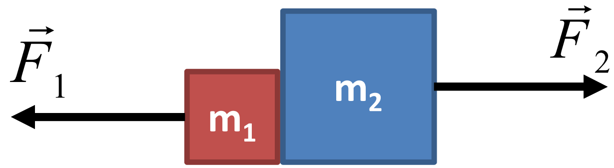
Interazione nella quale due o più corpi entrano in contatto e che soddisfa le seguenti caratteristiche:

- La forza media esercitata è grande;
- L'intervallo di tempo in cui la forza agisce è relativamente breve.

Ne consegue che:

- Il moto dei corpi durante l'urto è trascurabile;
- Le forze esterne sono trascurabili;
- La quantità di moto si conserva.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$



$$\Delta \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \, dt$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 \, dt$$

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ \text{(coppia azione-reazione)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \\ \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$$

Abbiamo visto che per i sistemi:

$$E_k = \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^{\,2} + E'_k$$

Poiché negli urti vale l'approssimazione $\vec{F}^{(E)} \cong 0$, allora

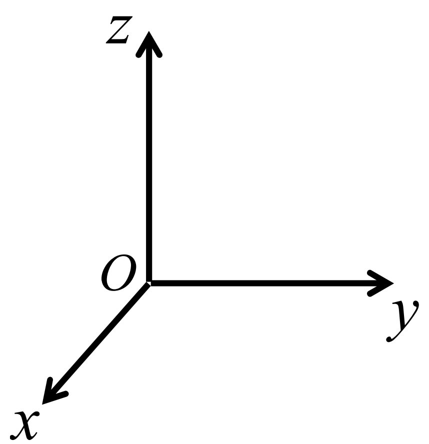
$$\sum_i \vec{p}_i = \text{cost.} \qquad \vec{v}_{CM} = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^{\,2} = \text{cost.}$$

In base a ciò che avviene per E'_k , distinguiamo:

- Urto perfettamente elastico $E'_k = \text{cost.}$ (E_k si conserva);
- Urto perfettamente anelastico $E'_k = 0$;
- Urto né perfettamente elastico né perfettamente anelastico (E'_k non si conserva e non si annulla).

DESCRIZIONE DEGLI URTI

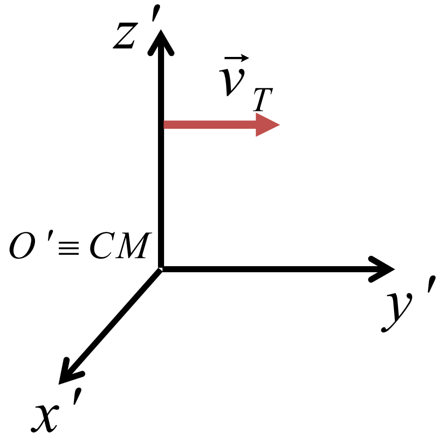
Sistema del laboratorio



• UN CORPO PUÒ ESSERE IN QUIETE PRIMA DELL'URTO (BERSAGLIO)

• DOPO UN URTO ELASTICO LE VELOCITÀ RELATIVE SI INVERTONO

Sistema del centro di massa



• LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE È NULLA PRIMA E DOPO L'URTO

$$m_1 v'_{1,i} + m_2 v'_{2,i} = m_1 v'_{1,f} + m_2 v'_{2,f} = 0$$

• DOPO UN URTO ANELASTICO I CORPI SONO IN QUIETE

• DOPO UN URTO ELASTICO LE VELOCITÀ SI INVERTONO

URTO PERFETTAMENTE ELASTICO
(in una dimensione)

Dalla conservazione della quantità di moto abbiamo

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

Dalla conservazione dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2$$

Raccogliendo le masse e semplificando opportunamente si ricavano le seguenti

$$\text{A:}\quad m_1\left(v_{1,i}-v_{1,f}\right)=m_2\left(v_{2,i}-v_{2,f}\right)$$

$$\text{B:}\quad m_1\left(v_{1,i}^2-v_{1,f}^2\right)=m_2\left(v_{2,i}^2-v_{2,f}^2\right)$$

Calcolando il rapporto B/A si trova che

$$v_{1,i}+v_{1,f}=v_{2,i}+v_{2,f}$$

da cui

$$v_{1,i}-v_{2,i}=v_{1,f}-v_{2,f}$$

La velocità relativa fra i due corpi prima e dopo l’urto è uguale.

Supponendo di conoscere le masse e le velocità iniziali dei due corpi è possibile trovare i valori delle velocità finali, attraverso le seguenti relazioni:

$$v_{1,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2,i} \qquad v_{2,f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2,i}$$

Possiamo osservare alcuni casi notevoli:

1. $m_1 = m_2$ ⇨ $v_{1,f} = v_{2,i}$, $v_{2,f} = v_{1,i}$ **LE VELOCITÀ DELLE PARTICELLE SI SCAMBIANO**

2. $v_{2,i} = 0$ ⇨ $v_{1,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i} \quad v_{2,f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i}$

SE POI:

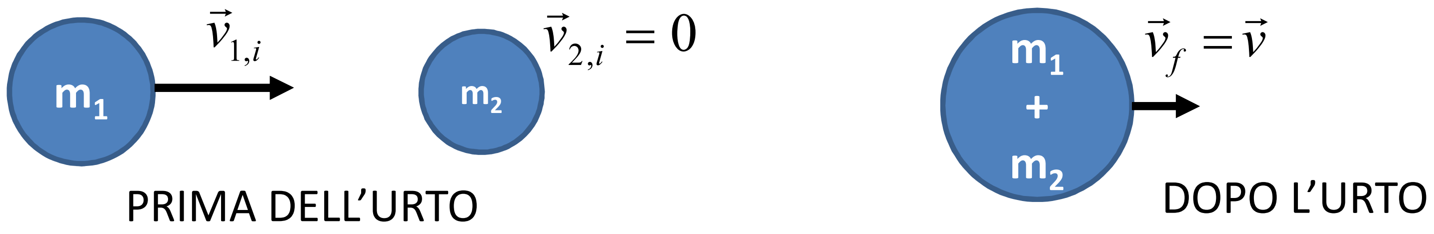
$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow v_{1,f} = 0 \quad v_{2,f} = v_{1,i}$$

$$m_2 \gg m_1 \quad \Rightarrow v_{1,f} \cong -v_{1,i} \quad v_{2,f} = 0$$

$$m_2 \ll m_1 \quad \Rightarrow v_{1,f} \cong v_{1,i} \quad v_{2,f} \cong 2v_{1,i}$$

URTO PERFETTAMENTE ANELASTICO

(in una dimensione)



Dalla conservazione della quantità di moto abbiamo

$$m_1 v_1 = \left(m_1 + m_2 \right) v$$

Per l'energia cinetica, prima e dopo, abbiamo

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \qquad\qquad E_{k,f} = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 \right) v^2$$

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Inserendola nell'espressione dell'energia cinetica finale si ha:

$$E_{k,f} = \frac{1}{2} \cancel{(m_1 + m_2)} \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^{\cancel{2}}} v_1^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_{k,i}$$

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{k,i}$$

URTO ANELASTICO
(in una dimensione)

Corrisponde al caso più comune, nel quale si ha conservazione della quantità di moto totale ma non dell'energia cinetica del sistema.

Ciò avviene perché una parte dell'energia viene dissipata durante l'urto: l'impulso della forza di interazione è maggiore nella fase di deformazione rispetto alla fase di ritorno.

Definiamo due parametri significativi (rispetto al SR del CM):

$$e = -\frac{p'_{1,f}}{p'_{1,i}} = -\frac{p'_{2,f}}{p'_{2,i}}$$ Coefficiente di restituzione

$$\delta = \frac{E'_{k,f} - E'_{k,i}}{E'_{k,i}} = e^2 - 1$$

$\xrightarrow{C}$

$e = 1,\ \delta = 0$ **COMP. ELASTICO**

$e = 0,\ \delta = -1$ **COMP. ANELASTICO**

CORPO RIGIDO

Sistema materiale indeformabile: la distanza relativa fra due punti qualunque del corpo rimane invariata.

L'azione delle forze interne non influenza il moto: potrebbe al limite mutare la distanza fra i singoli punti materiali, ma questo ci porterebbe fuori dalla definizione data.

Un corpo rigido libero nello spazio possiede **sei DOF** (Degrees Of Freedom). Il suo moto è governato dalle **equazioni cardinali**

$$\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

GOVERNA IL MOTO DEL CM

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

GOVERNA I MOTI ROTAZIONALI

Considerando un generico punto *P* del corpo rigido, possiamo definirne la velocità come segue:

$$\vec{v}_P = \boxed{\vec{v}_Q} + \boxed{\vec{\omega}} \wedge \boxed{\overline{QP}}$$

PUNTO QUALUNQUE DEL CORPO

VELOCITÀ ANGOLARE ISTANTANEA DEL CORPO ATTORNO ALL'ASSE PASSANTE PER Q

VETTORE CHE CONGIUNGE I DUE PUNTI

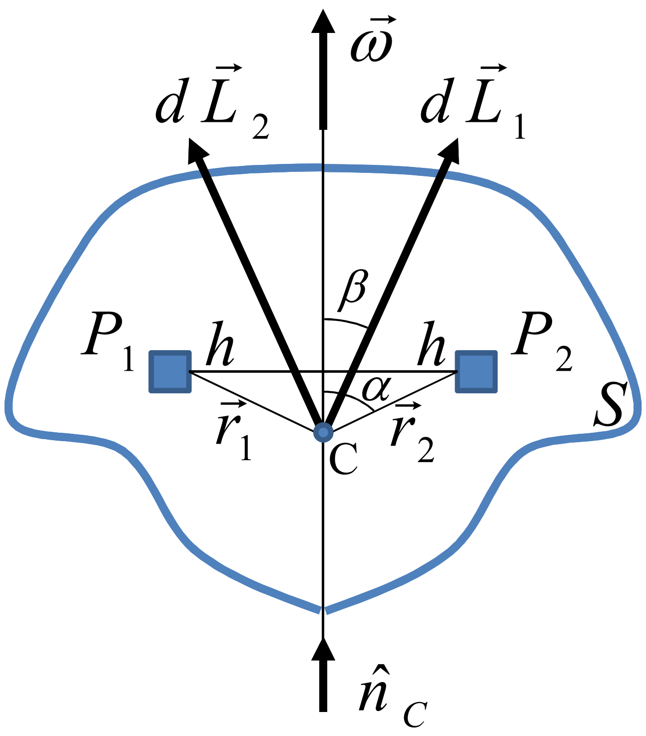
Inoltre indichiamo la condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido si trovi in una posizione di equilibrio:

in tale posizione devono essere nulli il risultante $\vec{F}^{(E)}$ e il momento $\vec{M}^{(E)}$ risultante delle forze esterne applicate al sistema.

$$\vec{M}^{(E)} = 0 \qquad \vec{F}^{(E)} = 0$$

MOMENTO D'INERZIA

Consideriamo un **corpo rigido simmetrico** che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto a un asse passante per il centro di massa.

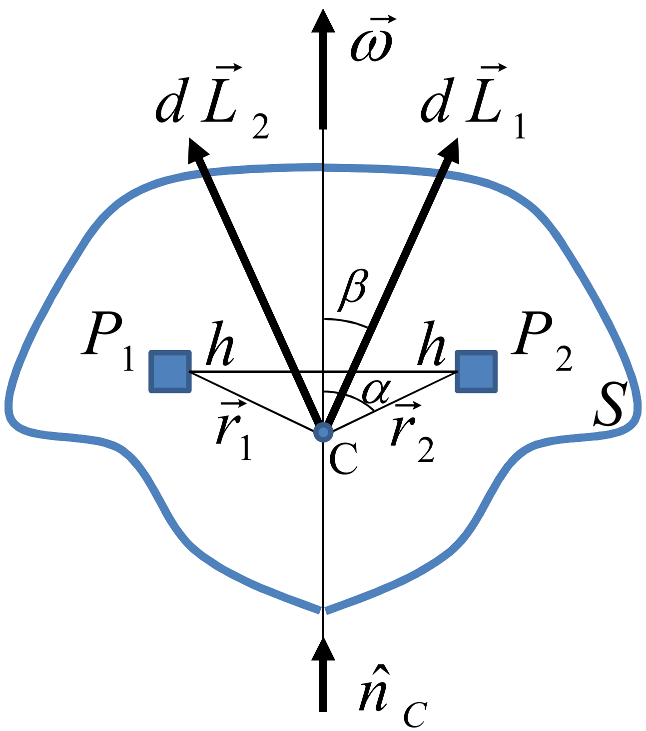


Per ogni punto P_1 di massa dm, esiste un simmetrico P_2, con la stessa massa. La velocità tangenziale dello i-esimo elemento è

$$v_i = \omega r_i \sin\alpha \, \hat{n}_1 = \omega h_i$$

Calcoliamo il Momento angolare di P_1 rispetto al CM:

$$d\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \wedge dm \, \vec{v}_1 = dm \, h \, r \, \omega \, \hat{n}_1$$



Calcoliamo il momento angolare di P_2 rispetto al CM:

$$d\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \wedge dm\,\vec{v}_2 = dm\,h\,r\,\omega\,\hat{n}_2$$

Consideriamo la componente del momento angolare che è parallela all'asse di rotazione, per cui abbiamo:

$$\begin{aligned} dL_{2,\parallel} &= dL_{1,\parallel} = dm\,\omega\,h\,r\cos\beta \\ &= dm\,\omega\,h\,r\sin\alpha \\ &= dm\,\omega\,h^2 \end{aligned}$$

Le componenti del momento angolare che sono ortogonali all'asse si annullano, quindi possiamo scrivere la seguente relazione vettoriale

$$d\vec{L}_1 + d\vec{L}_2 = \left(dL_{1,\parallel} + dL_{2,\parallel}\right)\hat{n}_C$$

Sommiamo su tutti gli elementi infinitesimi e distinguiamo due casi:

1. Il sistema è costituito da elementi discreti

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \left(\Delta m_i h_i^2 \right) \omega \hat{n}_C = I_C \vec{\omega}$$

2. Il sistema è continuo

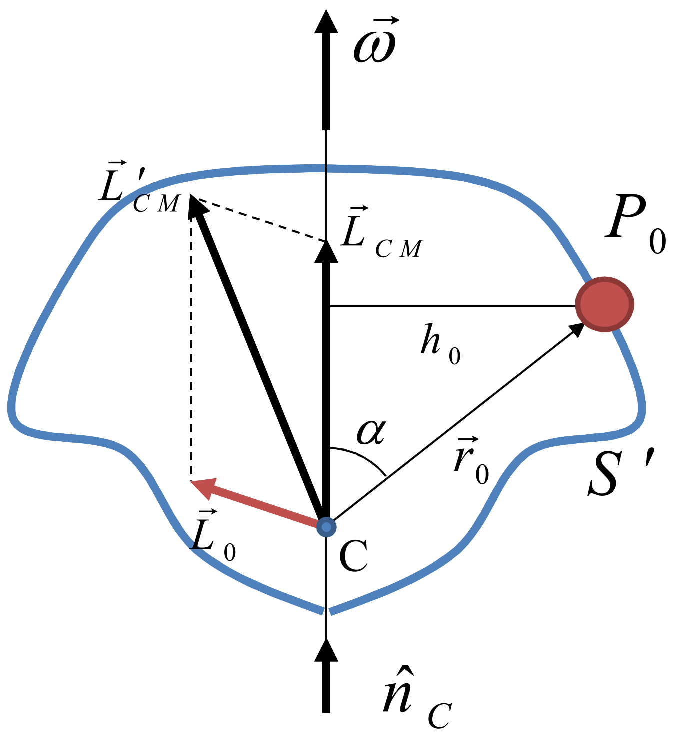
$$\vec{L}_{TOT} = \int \left(h^2 dm \right) \omega \hat{n}_C = \boxed{I_C} \vec{\omega}$$

MOMENTO D'INERZIA

$$I_C = \int r^2 dm$$

Se la velocità angolare è costante, allora lo è anche il momento angolare e di conseguenza non è necessario applicare nessun momento esterno per mantenere il sistema in rotazione. In questo caso si parla di **ASSE LIBERO DI ROTAZIONE** o **ASSE CENTRALE D'INERZIA** (è asse di simmetria del corpo).

Consideriamo il caso precedente se il **corpo rigido** è **asimmetrico**. Per realizzare l'asimmetria consideriamo un punto P_0 di massa m_0, come mostrato in figura.



Per ottenere il momento angolare del nuovo sistema dobbiamo considerare il momento angolare di P_0

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \wedge m_0 \vec{v}_0 = r_0 m_0 \omega h_0 \boxed{\hat{n}_0}$$

Versore ortogonale a $\vec{r}_0$

Quindi il momento angolare totale è:

$$\begin{aligned} \vec{L}'_C &= \vec{L}'_C + \vec{L}_0 \\ &= I_C \hat{n}_C \omega + r_0 m_0 h_0 \hat{n}_0 \omega \\ &= \underbrace{I_C \hat{n}_C}_{\vec{I}_C} \omega + \underbrace{I_0 \hat{n}_0}_{\vec{I}_0} \omega = \vec{I}'_C \omega \end{aligned}$$

In generale, il nuovo momento angolare non è parallelo al vettore velocità angolare e quindi

$$\frac{d\vec{L}'_C}{dt} \neq 0$$

L'asimmetria del sistema produce una variazione della direzione e del verso del momento angolare.
Ne consegue che:

- Deve agire sul sistema un momento esterno non nullo;
- $\hat{n}_C$ non è più asse libero di rotazione;
- Il punto *C* non è più il centro di massa del sistema *S'*

Consideriamo le componenti parallela e normale del momento angolare rispetto alla velocità angolare. Abbiamo che

$$\vec{L}'_C = \underbrace{\vec{L}'_{C,\parallel}}_{\vec{L}'_C \cdot \hat{n}_C} + \vec{L}'_{C,\perp}$$

Esplicitiamo la componente parallela

$$\begin{aligned} \vec{L}'_{C,\parallel} &= \left(I_C \omega \hat{n}_C + r_0 m_0 \omega h_0 \hat{n}_0 \right) \cdot \hat{n}_C \\ &= I_C \omega + \omega m_0 h_0 r_0 \underbrace{\sin a}_{\hat{n}_0 \cdot \hat{n}_C} \\ &= \left(I_C + m_0 h_0^2 \right) \omega = \boxed{I'_C} \omega \end{aligned}$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse $\hat{n}_C$ del sistema *S'*

Il prodotto fra momento d'inerzia e velocità angolare equivale alla proiezione del momento angolare sull'asse di rotazione.

Considerando la componente perpendicolare alla velocità angolare abbiamo

$$\vec{L}'_{C,\perp} = \vec{L}'_C \cdot \hat{n}_\perp$$

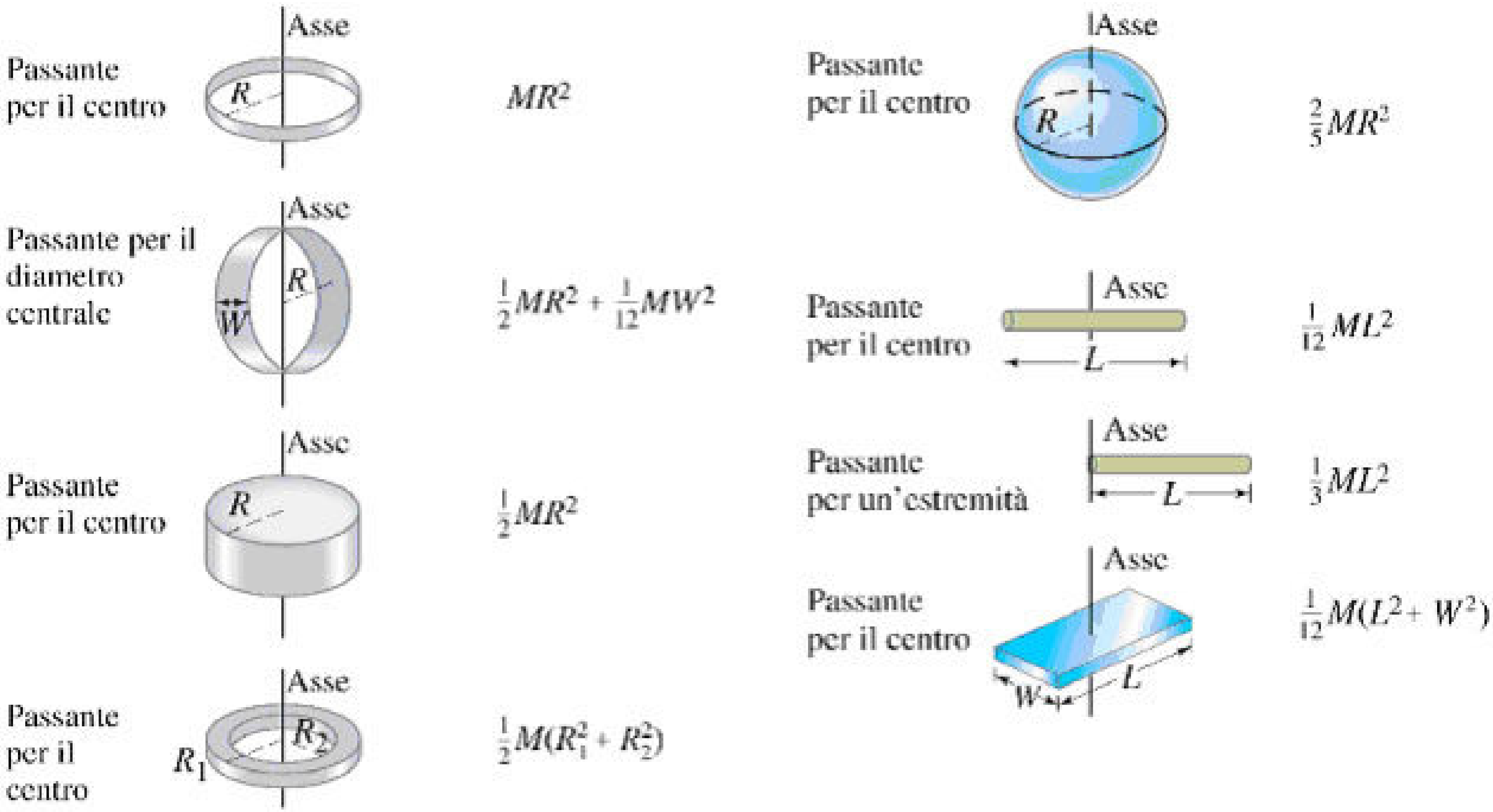
che identifica un **MOTO DI PRECESSIONE** (uniforme se la velocità angolare è costante). Inoltre, se il momento angolare è costante in modulo

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}'_{C,\perp}}{dt} = \frac{d\vec{L}'_C}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}'_C$$

In modulo

$$M = \frac{dL'_C}{dt} = L'_{C,\perp} \frac{d\theta}{dt} = L'_{C,\perp}\,\omega$$

ALCUNI VALORI DEL MOMENTO D'INERZIA



TEOREMA DI HUYGENS STEINER

Dato un sistema di massa *M* in un sistema di riferimento inerziale, il suo momento d'inerzia rispetto ad un qualunque asse fisso, e quello rispetto ad un asse ad esso parallelo passante per il centro di massa, stanno nella seguente relazione:

$$\boxed{I} = \boxed{I_{CM}} + \boxed{M}\,\boxed{h^2}$$

MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE PASSANTE PER IL PUNTO *P*

MOMENTO D'INERZIA RISPETTO A UN ASSE PASSANTE PER IL CM

MASSA DEL SISTEMA

DISTANZA DEGLI ASSI

Conoscendo il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse passante per il CM possiamo ricavarlo per qualsiasi asse ad esso parallelo.

ENERGIA CINETICA

L'energia cinetica di un corpo in rotazione è data dalla seguente:

$$E_k = \frac{1}{2} \boxed{I_z} \omega^2$$

MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZIONE DEL CORPO

VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA (MOTO CIRCOLARE DI RAGGIO *h*)

Utilizziamo il teorema di H.S.

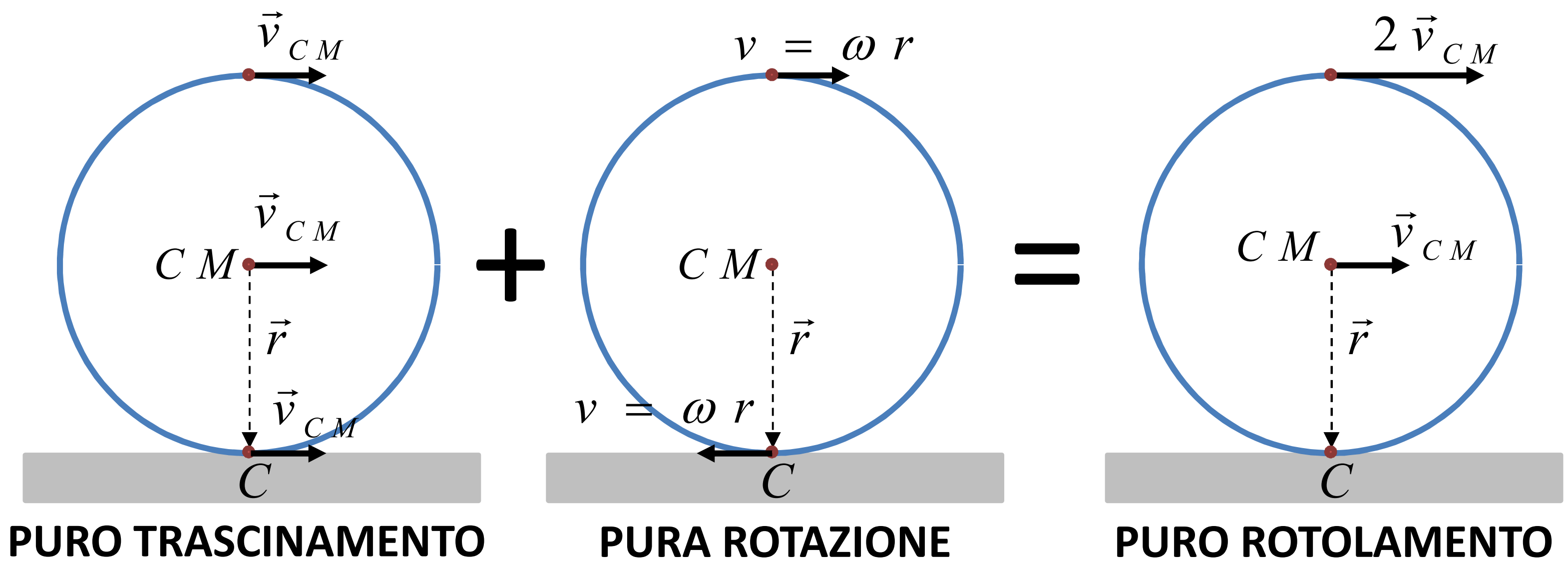
$$E_k = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + m h^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m \boxed{h^2 \omega^2}$$

Infine applichiamo il secondo teorema di König

$$\Rightarrow \quad E_k = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

MOTO ROTOTRASLATORIO

Nel moto di puro rotolamento, a causa della forza di attrito radente, la velocità del punto *C* è nulla.



La velocità del punto *C* è data da

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

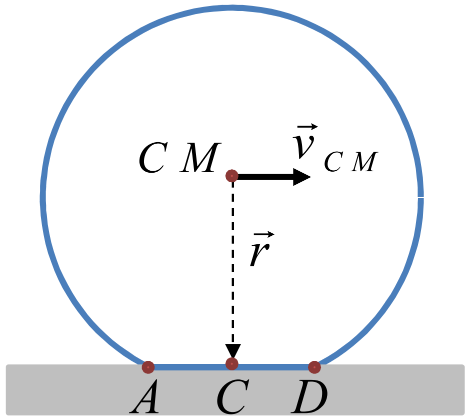
Se il moto è di puro rotolamento $\vec{v}_C = 0$, quindi

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

per cui, velocità angolare e del CM non sono indipendenti. L'energia cinetica del punto *C* è data da:

$$E_{k,C} = \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + M r^2\right)\omega^2$$
$$= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Il moto di puro rotolamento può avvenire su *vincolo perfetto*, oppure in presenza di **attrito volvente**.



CENNI DI GRAVITAZIONE

La forza di gravità appartiene alle **FORZE CENTRALI**:

- Sono molto importanti in Fisica
- Sono sempre dirette verso un centro di forza (nel quale si colloca l'origine del sistema di coordinate
- Sono conservative
- Il momento angolare si conserva

Nel 1665 **NEWTON** ipotizza che siano le stesse leggi a regolare il moto dei corpi celesti e la caduta dei gravi.
Elabora questa ipotesi a partire da:

- Le osservazioni di Tycho Brahe;
- I calcoli svolti da Keplero, che aveva enunciato tre leggi.

LEGGI DI KEPLERO

PRIMA LEGGE DI KEPLERO

I pianeti si muovono su orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

SECONDA LEGGE DI KEPLERO

I pianeti si muovono con velocità areale costante.

TERZA LEGGE DI KEPLERO

I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi delle distanze medie dal Sole (semi-asse maggiore), $T^2 = kr^3$.

CONSEGUENZE DELLA SECONDA E TERZA LEGGE DI KEPLERO

Se assumiamo che le orbite siano circolari, la seconda legge di Keplero si esprime come segue (moto circolare uniforme):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Per avere un moto circolare uniforme occorre che la forza agente sul pianeta abbia solo componente centripeta, per cui

$$\vec{F} = M_P \vec{a} = -M_P \omega^2 r \hat{r} = -M_P \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r \hat{r}$$

Il modulo della forza Terra-Sole vale

$$\vec{F}_{S,T} = F_C = M_T \omega^2 r = \frac{\left(4\pi^2 M_T r\right)}{T^2}$$

Dalla terza legge di Keplero si ottiene che

$$\vec{F}_{S,T} = \frac{\left(4\pi^2 M_T r\right)}{K_T r^3} \propto \frac{M_T}{r^2}$$

La forza è proporzionale alla massa della Terra e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Quindi, per il principio di azione e reazione

$$F_{S,T} = F_{T,S} \Rightarrow M_T K_S = M_S K_T$$

Definendo la costante

$$G = \frac{4\pi^2}{M_T K_S} = \frac{4\pi^2}{M_S K_T}$$

Si trova che

$$F = G \frac{M_T M_S}{r^2}$$

LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$$\vec{F}_{1,2} = -\boxed{G}\,\frac{M_1 M_2}{r_{1,2}^2}\,\hat{r}_{1,2}$$

COSTANTE DI
GRAVITAZIONE UNIVERSALE

La forza è attrattiva e la costante di gravitazione universale, che non dipende né dalla massa né dalla distanza, vale

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\boxed{\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}}$$

$$\boxed{\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}}$$

ENERGIA

L’energia potenziale gravitazionale è

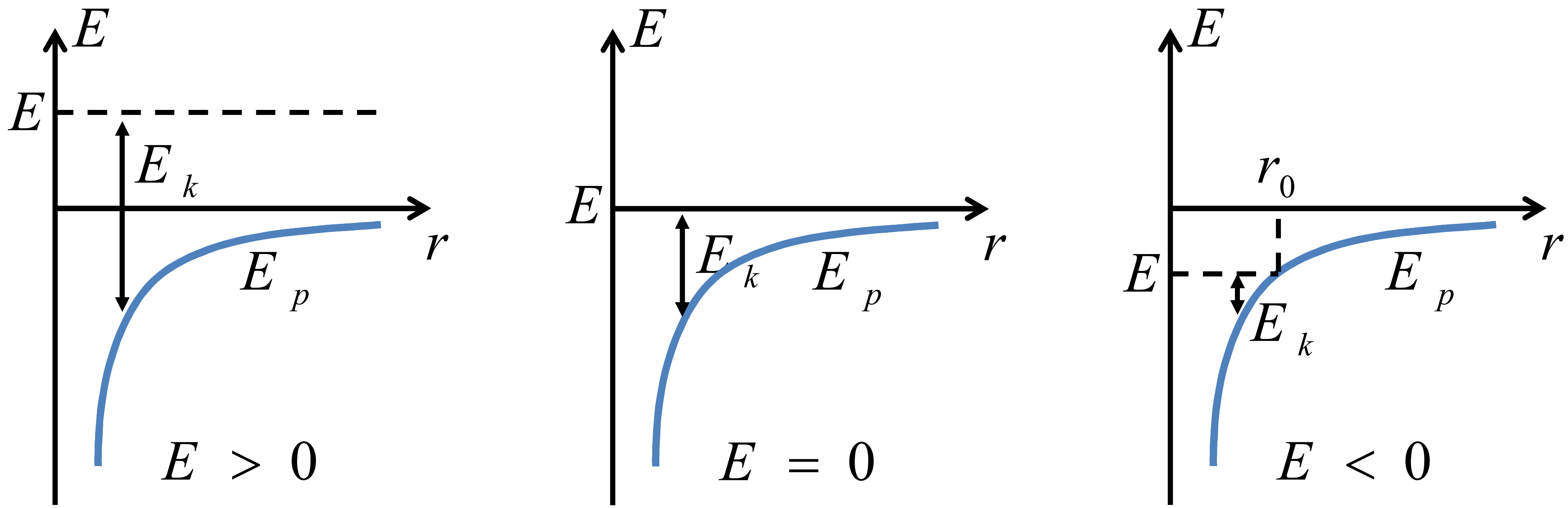
$$E_p(r) = -G\frac{M_1 M_2}{r_{1,2}} + \boxed{C}$$

SI ASSUME NULLA QUANDO
LA DISTANZA È INFINITA

L’energia potenziale è nulla quando la distanza fra i due corpi è infinita. Poiché si tratta di un campo di forze conservative, quando la “massa campione” si avvicina alla sorgente del campo:

- Le forze del campo compiono lavoro positivo;
- L’energia cinetica aumenta;
- L’energia potenziale diminuisce e quindi assume valori negativi.

L’energia meccanica può assumere valori negativi, positivi oppure può annullarsi. Si possono verificare quindi i seguenti casi:



ORBITA IPERBOLICA

$$E_k > |E_p|$$

ORBITA PARABOLICA

$$E_k = |E_p|$$

ORBITA ELLITTICA

$$E_k < |E_p|$$

Questi grafici e le relative conclusioni ad essi legate sono da considerarsi descrizioni approssimative e qualitative del fenomeno.