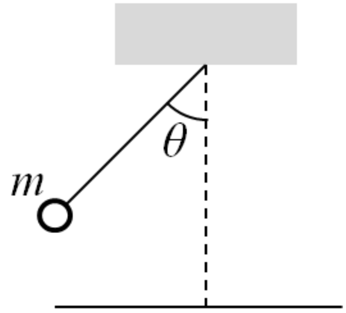
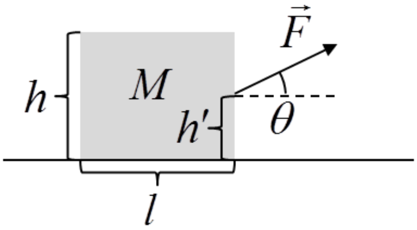
Esame di Fisica I
Corso di Laurea in Chimica – 28/06/2013

1) Un pendolo semplice, costituito da un filo inestensibile di massa trascurabile, al quale è appesa una massa $m = 0.3\ \text{kg}$, è caratterizzato (per piccole oscillazioni) da un periodo $T = 5.0\ \text{s}$*.



a. Sapendo che all'istante iniziale il filo forma un angolo $\theta = 45°$ con la verticale, si determini la velocità della massa quando $\theta = 0°$, nell'ipotesi che non agiscano forze di attrito. **(4 punti)**
b. Quando $\theta = 0°$, la massa urta un corpo di massa $M = 2.0\ \text{kg}$ che si trova in quiete. Si determini la velocità dei corpi immediatamente dopo l'urto, sapendo che questo è completamente elastico. **(3 punti)**
c. Determinare il lavoro della forza di attrito sapendo che il corpo di massa M si ferma dopo un tempo $t = 2.0\ \text{s}$. **(3 punti)**

2) Un corpo di massa $M = 40.0\ \text{kg}$ è soggetto a una forza $F = 150\ \text{N}$ che agisce lungo la direzione indicata nella figura (dove $\theta = 30°$, $l = 0.6\ \text{m}$ e $h = 0.5\ \text{m}$) e si muove di moto rettilineo uniforme.



a. Si determini il valore del coefficiente di attrito dinamico μ_d fra il corpo e il piano. **(4 punti)**
b. A un certo istante la forza non è più applicata al corpo che percorre la distanza $d = 1.5\ \text{m}$ e si ferma contro una molla di costante elastica $k = 5.0 \cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$, che si trovava nella posizione di equilibrio, comprimendola di $10.0\ \text{cm}$. Determinare la velocità iniziale del corpo. **(4 punti)**
c. Si consideri la massa M come un corpo esteso omogeneo e si determini l'altezza h' alla quale applicare la forza $F = 350\ \text{N}$ (con stessa direzione e stesso verso del caso **a.**), affinché il corpo inizi a ribaltarsi. **(2 punti)**

3) Si considerino $n = 0.46\ \text{mol}$ di He, inizialmente alla temperatura di $T_1 = 127\ °\text{C}$ e alla pressione $p_1 = 1.0 \cdot 10^5\ \text{Pa}$. Il gas, che può essere considerato ideale, viene successivamente sottoposto alle trasformazioni termodinamiche elencate di seguito:

1. Compressione adiabatica fino alla pressione $p_2 = 3.0 \cdot 10^5\ \text{Pa}$;
2. Riscaldamento a volume costante, fornendo dall'esterno la quantità di calore $Q = 3500\ \text{J}$;
3. Espansione adiabatica che lo riporta alla pressione p_1;
4. Trasformazione isobarica fino allo stato iniziale.

Calcolare:

a. Le coordinate termodinamiche nei quattro stati assunti dal sistema e rappresentarle in un grafico pV; **(5 punti)**
b. Il rendimento del ciclo; **(2 punti)**
c. Il lavoro ottenuto dal ciclo; **(2 punti)**
d. La variazione di energia interna nelle singole trasformazioni; **(2 punti)**

* Refuso presente nel testo d'esame dove era $T = 0.05\ \text{s}$.

RISOLUZIONE

Problema 1

a. Per il periodo di oscillazione del pendolo semplice nell'approssimazione delle piccole oscillazioni vale la seguente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dove L indica la lunghezza del pendolo e $g = 9.81\ \mathrm{ms^{-2}}$. Ricaviamo quindi la lunghezza del pendolo:

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 6.2\ \mathrm{m}$$

Poiché non agiscono forze di attrito, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica, come segue:

$$\cancel{m}g\Delta h = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

dove Δh è la variazione di quota della massa m durante il movimento da $\theta = 45°$ a $\theta = 0°$. Quindi, si ha:

$$gL(1-\cos 45°) = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gL(1-\cos 45°)} = 6.0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b. Essendo l'urto completamente elastico, si conservano quantità di moto e energia cinetica:ù

$$\begin{cases} mv_{1,i} + \cancel{Mv_{2,i}} = mv_{1,f} + Mv_{2,f} \\ \frac{1}{2}mv_{1,i}^2 + \cancel{\frac{1}{2}Mv_{2,i}^2} = \frac{1}{2}mv_{1,f}^2 + \frac{1}{2}Mv_{2,f}^2 \end{cases}$$

dove:

- $v_{1,i}$ è la velocità trovata nel punto precedente (massa *m*, prima dell'urto);
- $v_{2,i}$ è la velocità del corpo di massa *M*, prima dell'urto (dal testo sappiamo che $v_{2,i} = 0$);
- $v_{1,f}$ è la velocità del corpo di massa *m* dopo l'urto;
- $v_{2,f}$ è la velocità del corpo di massa *M* dopo l'urto.

Risolvendo il sistema si trova che:

$$v_{1,f} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)v_{1,i} = -4.4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_{2,f} = \frac{2m}{m+M}v_{1,i} = 1.6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c. Questo punto si poteva risolvere sia considerando il tempo $t = 2.0\ \mathrm{s}$ necessario al corpo per fermarsi, oppure, più semplicemente, osservando che il lavoro della forza di attrito corrisponde alla variazione dell'energia cinetica:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}Mv_{2,f}^2 = 2.4\ \mathrm{J}.$$

Problema 2

a. Poiché il corpo si muove di moto rettilineo uniforme, la risultante delle forze sull'asse *x* (orientato lungo la direzione del moto) deve essere nulla. Allora:

$$F\cos\theta - F_A = F\cos\theta - \mu_d N = 0$$

Poiché su *y* abbiamo il contributo della forza peso e della componente verticale di *F*, la reazione normale *N* è:

$$N = Mg - F\sin\theta$$

Allora, sostituendo nella precedente, si trova il coefficiente di attrito dinamico:

$$F\cos\theta-\mu_d\left(Mg-F\sin\theta\right)=0\Rightarrow\mu_d=\frac{F\cos\theta}{Mg-F\sin\theta}=0.41$$

b. La velocità iniziale v_i si ottiene si ottiene considerando che:

$$\frac{1}{2}Mv_i^2=\mu_d Mgd+\frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Risolvendo si ha:

$$v_i=\sqrt{\frac{2\left(\mu_d Mgd+\frac{1}{2}k\Delta x^2\right)}{M}}=4.95\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c. Per il valore dato della forza *F*, c'è un valore di *h*, che indichiamo con h', per il quale il corpo inizia a "ribaltarsi in avanti", ruotando attorno allo spigolo inferiore destro. Tale condizione limite si raggiunge quando sono uguali i momenti applicati e dovuti alla forza peso e alla forza "trainante" applicata al corpo. Poiché il corpo è omogeneo il suo centro di massa si troverà alla distanza $\frac{l}{2}$ dal polo di rotazione e si ha quindi che:

$$\frac{l}{2}Mg=h'F\cos\theta\Rightarrow h'=\frac{lMg}{2F\cos\theta}=0.39\ \mathrm{m}.$$

Problema 3

a. Iniziamo ricavando il volume nello **stato 1**:

$$p_1V_1=nRT_1\Rightarrow V_1=\frac{nRT_1}{p_1}=1.53\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}^3$$

$$p_1=1.0\cdot10^5\ \mathrm{Pa}\qquad V_1=1.53\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}^3\qquad T_1=400.15\ \mathrm{K}\cong400\ \mathrm{K}$$

Per lo **stato 2** utilizziamo le formule per le trasformazioni adiabatiche:

$$p_1V_1^\gamma=p_2V_2^\gamma\Rightarrow V_2=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}V_1=0.79\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}^3\qquad \text{per un gas monoatomico: } \gamma=\frac{c_p}{c_v}=\frac{5}{3}\cong1.67$$

Dalla legge dei gas perfetti, ricaviamo il volume:

$$T_2=\frac{p_2V_2}{nR}=621\ \mathrm{K}$$

$$p_2=3.0\cdot10^5\ \mathrm{Pa}\qquad V_2=0.79\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}^3\qquad T_2=621\ \mathrm{K}$$

Per lo **stato 3** utilizziamo le formule per le trasformazioni isocore:

$$Q_{2,3}=nc_v\Delta T=n\frac{3}{2}R\left(T_3-T_2\right)\Rightarrow T_3=T_2+\frac{Q_{2,3}}{n\frac{3}{2}R}=1231\ \mathrm{K}$$

Inoltre, per Gay-Lussac

$$\frac{p_3}{p_2}=\frac{T_3}{T_2}\Rightarrow p_3=\frac{T_3}{T_2}p_2=5.9\cdot10^5\ \mathrm{Pa}\cong6.0\cdot10^5\ \mathrm{Pa}$$

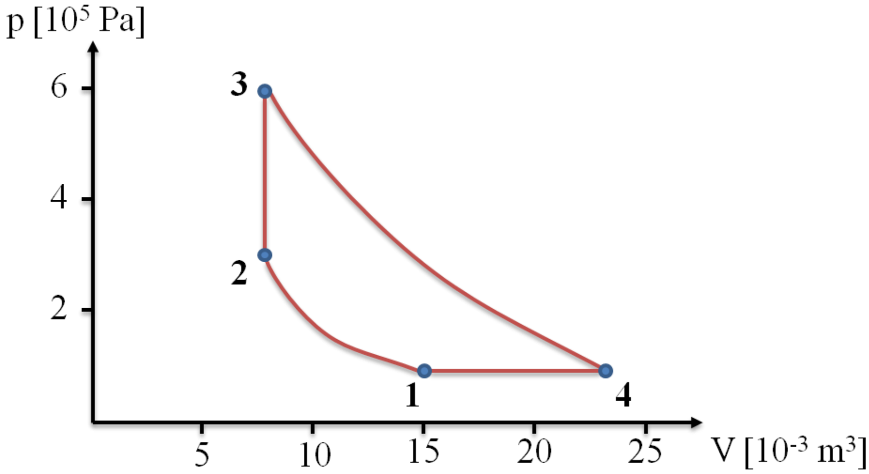
$$p_2=6.0\cdot10^5\ \mathrm{Pa}\qquad V_3=V_2=0.79\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}^3\qquad T_2=1231\ \mathrm{K}$$

Per lo **stato 4** utilizziamo le formule per le trasformazioni adiabatiche:

$$p_4V_4^\gamma=p_3V_3^\gamma\Rightarrow V_4=\left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{1}{\gamma}}V_3=2.3\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}^3$$

$$T_4=\frac{p_4V_4}{nR}=603\ \mathrm{K}$$

$$p_4=p_1=1.0\cdot10^5\ \mathrm{Pa}\quad V_4=2.3\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}^3\qquad T_4=603\ \mathrm{K}$$



b. Lo scambio di calore avviene nelle trasformazioni 2,3 e 4,1:

$$Q_{2,3} = 3500 \text{ J}$$

$$Q_{4,1} = nc_p\left(T_1 - T_4\right) = n\frac{5}{2}R\left(T_1 - T_4\right) = -1942 \text{ J}$$

$$\eta = \frac{Q_{2,3} + Q_{4,1}}{Q_{2,3}} = 1 - \frac{\left|Q_{4,1}\right|}{Q_{2,3}} = 45\%$$

c. Per il primo principio della termodinamica, per il ciclo si ha che:

$$\Delta U = Q - W = 0 \Rightarrow L = Q = Q_{2,3} + Q_{4,1} = 3500 \text{ J} - 1942 \text{ J} = 1558 \text{ J}$$

d. I valori dell'energia interna per ogni trasformazione sono:

$$\Delta U_{1,2} = nc_v\left(T_2 - T_1\right) = 1266 \text{ J}$$

$$\Delta U_{2,3} = Q_{2,3} = 3500 \text{ J}$$

$$\Delta U_{3,4} = nc_v\left(T_4 - T_3\right) = -3601 \text{ J}$$

$$\Delta U_{4,1} = nc_v\left(T_1 - T_4\right) = -1165 \text{ J}$$

Verifichiamo che deve essere

$$\Delta U_{1,2} + \Delta U_{2,3} + \Delta U_{3,4} + \Delta U_{4,1} = 0$$

PROBLEMA 2 del secondo parziale

Un sistema è costituito da un contenitore che ha al proprio interno una quantità d'acqua pari a $m_{\text{Acq}} = 2.00 \text{ kg}$ e un blocco di ghiaccio ($m_{\text{Ghi}} = 0.10 \text{ kg}$). Inizialmente l'intero sistema si trova in equilibrio termico alla temperatura di $0\ °\text{C}$.

a. Si determini, sapendo che la massa equivalente in acqua del contenitore è $m_{eq} = 0.05 \text{ kg}$, quanta energia occorre fornire al sistema affinché raggiunga la temperatura di $90\ °\text{C}$. **(8 punti)**

($\lambda_F = 3.3 \cdot 10^5 \ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$, $c_{Acq} = 4187 \ \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$)

b. Dopo un certo tempo, il sistema raggiunge l'equilibrio termico con l'ambiente, alla temperatura $T_{\text{Amb}} = 20\ °\text{C}$. Sapendo che il contenitore ha forma cilindrica, che il raggio della base misura $r = 6.0 \text{ cm}$ e che il coefficiente di dilatazione cubica dell'acqua è $\alpha_{\text{Acq}} = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, si determini di quanto è variato il livello dell'acqua all'interno del recipiente a causa della variazione di temperatura, trascurando la variazione di volume del contenitore. **(6 punti)**

c. Un oggetto di forma cubica, con lato $l = 0.05\ \text{m}$, di massa $m = 0.127\ \text{kg}$ costituito da un materiale avente calore specifico $c = 420.0\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ e coefficiente di dilatazione termica lineare $\lambda = 5.0\cdot 10^{-5}\ \text{K}^{-1}$, che si trova alla temperatura $T = 200\ \text{K}$, viene posto all'interno del recipiente e si appoggia sul fondo. Quale sarà la nuova temperatura di equilibrio del sistema? Cosa è possibile notare? **(3 punti)**

RISOLUZIONE

a. Il valore richiesto è dato da:

$$Q = m_{\text{Ghi}}\lambda_F + \left(m_{\text{Acq}} + m_{\text{Ghi}} + m_{\text{eq}}\right)c_{\text{Acq}}\Delta T = 8.4\cdot 10^5\ \text{J}$$

b. Troviamo il volume di partenza dell'acqua:

$$V = \frac{m_{\text{Acq}} + m_{\text{Ghi}}}{\rho_{\text{Acq}}} = 2.1\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

Calcoliamo l'area di base del cilindro:

$$A_b = \pi r^2 = 1.1\cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$$

Poiché la variazione di temperatura nel passaggio da 90 °C a 20 °C è di 70 °C, la variazione di volume è data da:

$$\Delta V = V_0 \alpha_{\text{Acq}} \Delta T = 2.65\cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$$

Quindi, la variazione di livello è

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{A_b} = 2.3\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

c. L'acqua nel recipiente si trova alla temperatura $T_{\text{Amb}} = 293\ \text{K}$. Si può concludere che, data l'elevata capacità termica dell'acqua nel recipiente, molto maggiore rispetto a quella dell'oggetto inserito, la temperatura di equilibrio sarà:

$$T_{eq} \cong T_{\text{Amb}}$$

Effettuando i calcoli si trova che $T_{eq} = 292.5\ \text{K}$.

Possiamo calcolare il volume dell'oggetto, che risulta essere:

$$V_O = l^3 = 1.25\cdot 10^{-4}\ \text{m}^3$$

Inoltre, possiamo affermare che la densità dell'oggetto inserito nel recipiente è maggiore di quella dell'acqua (si assume $\rho_{\text{Acq}} = 1000\ \text{kg/m}^3$). Esso subisce però un riscaldamento e la variazione di volume è:

$$\Delta V_O = 3V_O \lambda \Delta T = 1.73\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Quindi, il nuovo volume è:

$$V_O' = V_O + \Delta V_O = 1.27\cdot 10^{-4}\ \text{m}^3$$

Se calcoliamo la densità dell'oggetto dopo che ha raggiunto l'equilibrio termico con il sistema troviamo:

$$\rho = \frac{m}{V_O'} = 0.99 < \rho_{\text{Acq}}$$

Ne consegue che l'oggetto, che inizialmente affondava, ora galleggia.