# RIGIDEZZA DI INGRANAMENTO

Il modello di rigidezza variabile proposto da J. H. Kuang e da Y. T. Yang [1] rappresenta uno dei più importanti elaborati riguardanti il tema dell'eccitazione parametrica legata alla variabilità della rigidezza di ingranamento. In questo modello si è sviluppata una trattazione analitica, supportata da un'analisi agli elementi finiti. In particolare è stata sviluppata un'equazione che rappresenta la rigidezza di un singolo dente (pensato come una trave a mensola): in questo modo è possibile eseguire direttamente il calcolo della rigidezza d'ingranamento di un generico ingranaggio a denti diritti. Questa equazione è applicabile sia a ruote corrette, che a ruote normali. Per modellare la variabilità della rigidezza di ingranamento, in funzione della posizione e di latri parametri geometrici della ruota, Kuang e Yang hanno ricavato un'equazione empirica che descrive la rigidezza di un singolo dente lungo l'arco d'azione. La rigidezza del singolo dente $K_i$ in corrispondenza della generica distanza radiale $r_i$ del dente i-esimo è la seguente (espressa in [N/m/m]):

$$\mathrm{K_i(r_i) = 10 \wedge 9 * [((A_0 + A_1 x_i) + (A_2 + A_3 x_i)\frac{r_i - R_i}{(1+x_i)m})]} \quad \textbf{(1)}$$

dove

$$A_0 = 3.867 + 1.612 \cdot Z_i - 0.02916 \cdot Z_i^2 + 0.0001553 \cdot Z_i^3$$
$$A_1 = 17.060 + 0.7289 \cdot Z_i - 0.01728 \cdot Z_i^2 + 0.00009993 \cdot Z_i^3$$
$$A_2 = 2.637 - 1.222 \cdot Z_i + 0.02217 \cdot Z_i^2 - 0.0001179 \cdot Z_i^3$$
$$A_3 = -6.330 - 1.033 \cdot Z_i + 0.02068 \cdot Z_i^2 - 0.0001130 \cdot Z_i^3$$

e dove:

**$K_i(r_i)$** è la rigidezza del dente dell'i-esima ruota quando il contatto avviene nel punto definito dal raggio $r_i$ La rigidezza è definita come la forza che è necessario applicare per deformare di 1 m sulla retta d'azione un singolo dente di 1 m di larghezza assiale ([N/m/m]);

**$x_i$** è il coefficiente di correzione della i-esima ruota, pari al rapporto tra lo spostamento v della linea di taglio dalla linea di riferimento ed il modulo m( $x = \frac{v}{m}$ );

**m** è il modulo della ruota [m];

**$Z_i$** è il numero di denti della ruota i-esima;

**$R_i$** è il raggio primitivo della ruota i-esima [m];

$r_i(q)$ definisce la posizione del punto di contatto al tempo t sulla linea di contatto.

I range di valori del numero di denti e del coefficiente di correzione in cui è applicabile questa equazione sono:

- $-0.6 < x_i < 0.6$;
- $12 < z_i < 100$.

Una volta definita la $K_i$ del generico dente, è abbastanza semplice il calcolo della rigidezza della singola coppia, indicata con $K_S$. Infatti la costante $K_i$ rappresenta la rigidezza flessionale del dente e in un modello dinamico a parametri concentrati la si può descrivere mediante una molla. In presenza di due denti che ingranano tra loro, si hanno due costanti, $K_1$ e $K_2$, che risultano essere in serie. La rigidezza della singola coppia di denti in presa è proprio la rigidezza singola $K_S$, equivalente alle rigidezze $K_1$ e $K_2$ disposte in serie.

La Figura 1 riporta uno schema in cui sono rappresentati i due denti collegati da una molla equivalente a due molle in serie di rigidezze $K_1$ e $K_2$,.

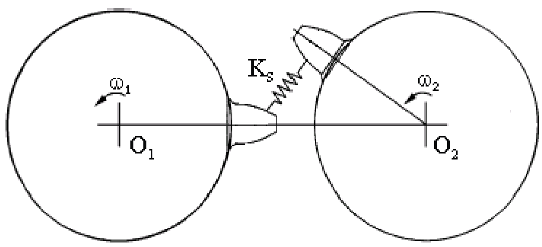


**Figura 1 – Rigidezza della singola coppia in presa**

La relazione analitica che fornisce la rigidezza equivalente è:

$$K_S = \frac{K_1(r_1)K_2(r_2)}{K_1(r_1) + K_2(r_2)} \quad \textbf{(2)}$$

Per descrivere le posizioni successive assunte dal dente durante l'ingranamento sono stati presi in considerazione quattro punti di contatto:

A. punto di inizio ingranamento;
B. punto di inizio ingranamento di una sola coppia di denti;
C. punto di fine ingranamento di una sola coppia di denti;
D. punto di fine ingranamento.

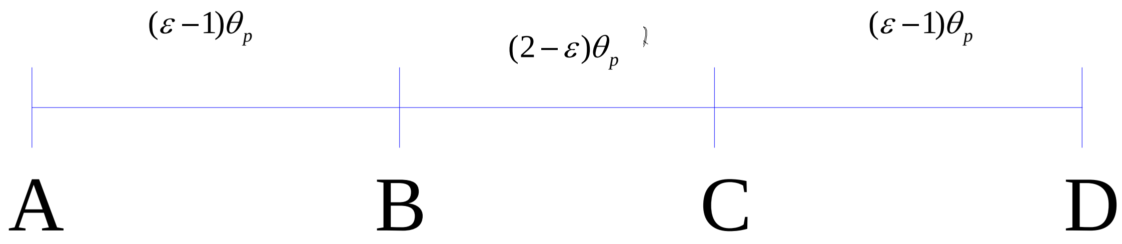


**Figura 2 Segmento di contatto (** $\theta_p = 2\pi / z$ **, passo angolare)**

Nell'eventualità in cui ε = 1 (fattore di ricoprimento) si avrebbe sempre una sola coppia di denti in presa e la rigidezza di ingranamento $K_m$ coinciderebbe con la rigidezza della singola coppia $K_S$, ma questo è un caso limite. Normalmente si ha ε compreso tra 1 e 2 e, quindi, durante l'ingranamento si passa ciclicamente da una a due coppie in presa.

Si consideri un ingranaggio generico e due coppie di denti: la coppia A composta dai denti 1 e 2 e la coppia B composta dai denti 3 e 4. I denti 1 e 3 appartengono alla ruota motrice, i denti 2 e 4 alla ruota condotta, come si può osservare in Figura 3.

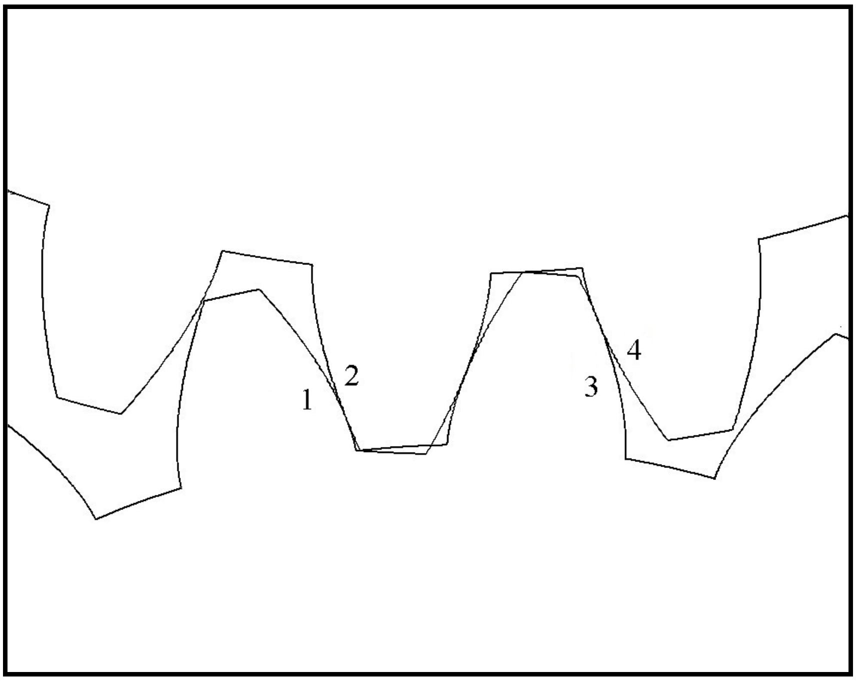


**Figura 3**

Nella fase iniziale, tratto compreso tra i punti A e B, si hanno due coppie in presa: il dente 1 incomincia ad impegnarsi con il corrispondente dell'altra ruota, mentre il dente 3, che lo precede traslato di un passo, percorre il tratto finale del suo ingranamento, compreso tra C e D. Quando la coppia A comincia a percorrere il tratto B-C, la coppia B si è già disimpegnata mentre la successiva coppia di denti non ha ancora incominciato ad ingranare. Nell'ultima parte la coppia A compie il tratto finale e la coppia successiva, contemporaneamente, il tratto iniziale A-B. Nella fase centrale dell'ingranamento (tratto B-C) si ha solo una coppia caricata e, quindi, la rigidezza d'ingranamento coincide con la rigidezza della coppia A, denominata $K_S^A$. Nei tratti iniziale e finale invece si hanno due coppie impegnate e la situazione è analoga a due molle disposte in parallelo perciò $K_m$ in questo caso è pari alla somma delle due rigidezze delle coppie in presa, $K_S^A$ e $K_S^B$.

Le espressioni delle rigidezze delle due coppie in presa sono:

$$K_S^A = \frac{K_1^A(r_1^A)K_2^A(r_2^A)}{K_1^A(r_1^A) + K_2^A(r_2^A)}$$

$$K_S^B = \frac{K_1^B(r_1^B)K_2^B(r_2^B)}{K_1^B(r_1^B) + K_2^B(r_2^B)}$$

**( 3) ( 4)**

Per quanto riguarda $K_m$ si ha invece:

- $K_m = K_S^A$, se si ha una sola coppia in presa, cioè se si percorre il tratto B-C;
- $K_m = K_S^A + K_S^B$, se si hanno due coppie in presa, tratti A-B e C-D.

L'andamento della rigidezza subisce una forte discontinuità in corrispondenza del passaggio da due coppie ad una coppia di denti in presa e questo rappresenta un elemento importante nell'analisi del comportamento vibratorio degli ingranaggi.

## Implementazione della Rigidezza di Kuang-Yang in Matlab

Il metodo di Kuang Yang può essere così implementato:

Per ottenere la distanza radiale $r_1$ ed $r_2$ si usano le formule 10-11 che definiscono la posizione del punto di -contatto lungo la retta d'azione in funzione della rotazione della ruota $\vartheta$

Sia T il periodo di ingranamento (5) e $R_{1,\inf}$ la distanza radiale (6) dal punto di inizio contatto A Figura 2

$$T = \frac{60}{nZ} \quad \textbf{( 5)}$$

$$R_{1,\inf} = \sqrt{\left(a \cdot \sin\alpha - \sqrt{R_{t2}^{\ 2} - R_{b2}^{\ 2}}\right)^2 + R_{b1}^{\ 2}} \quad \textbf{( 6)}$$

Dove $a, \alpha, R_{ti}, R_{bi}$ sono l’interasse, l’angolo di pressione, il raggio di testa e il raggio base della ruota i-esima.
Sia $\vartheta$ l’angolo che definisce l’avanzamento dell’ingranamento dal punto A (inizio ingranamento) al punto D (fine del segmento di contatto).

$$\overline{NM} = \overline{NA} + \overline{AM} \quad \textbf{( 7)}$$

Il segmento $\overline{NA}$ può essere calcolato usando il teorema di Pitagora riferito al triangolo $ANO_1$ :

$$\overline{NA} = \sqrt{R_{1,\inf}^{\ 2} - R_{b1}^{\ 2}} \quad \textbf{( 8)}$$

mentre dalle proprietà dell’evolvente si ottiene $\overline{AM}$

$$\overline{AM} = R_{b1}\vartheta \quad \textbf{( 9)}$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $NMO_1$ si ottiene che:

$$r_1 = \sqrt{R_{b1}^{\ 2} + \overline{NM}} = \sqrt{R_{b1}^{\ 2} + \left[\sqrt{R_{1,\inf}^{\ 2} - R_{b1}^{\ 2}} + R_{b1}\vartheta\right]^2} \quad \textbf{( 10)}$$

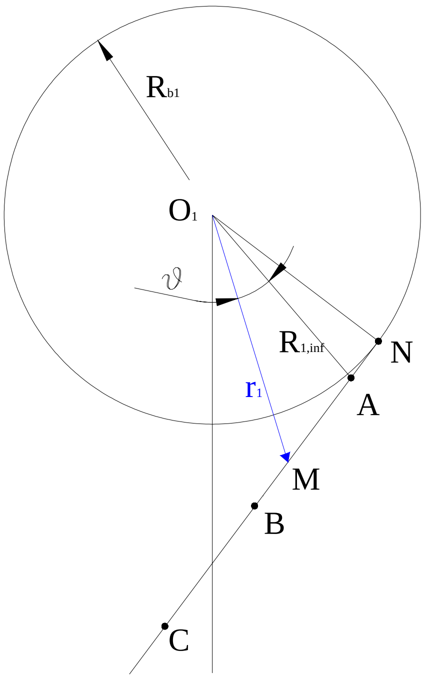


**Figura 10**

Il raggio che identifica la posizione del punto di contatto relativamente alla ruota 2 è calcolato dalla formula.

$$r_2 = \sqrt{R_{b2}{}^2 + \left[ a_l \cdot \sin \alpha_l - \sqrt{r_{AB1}{}^2 - R_{b1}{}^2} \right]^2} \quad \textbf{(11)}$$

La (11) è ottenuta con un procedimento analogo alla (10).

Per il tratto AB con 2 coppie di denti in presa si ricavano con la (1) le rigidezze dei singoli denti chiamate $K_{AB1}$ e $K_{AB2}$, rispettivamente per la ruota 1 e 2, utilizzando all'interno della (1) il raggio $r_{AB1}$ e $r_{AB2}$.

Questi due raggi sono definiti dalla 10 e 11 in cui l'angolo $\vartheta$ della 10 è l'angolo che spazza il segmento di contatto dal punto A al punto B($\vartheta_{AB}$).

Analogamente si ricavano le rigidezze del singolo dente per i tratti BC e CD.

Una volta ottenute le rigidezze dei singoli denti si ottengono per i tratti in cui ci sono 2 coppie in presa(tratto AB e CD) le rigidezze delle due coppie, chiamate coppia A(quella in contatto lungo il segmento AB) e coppia B (in contatto lungo il segmento CD).Queste 2 rigidezze sono calcolate con la (3-4) considerando cioè ogni coppia in contatto (formata da 2 denti) equivalenti a 2 molle in serie di rigidezza pari alla rigidezza del singolo dente.

Una volta ottenute le rigidezze delle 2 coppie A e B contemporaneamente in presa ($K_A, K_B$), la rigidezza totale ($K_C$) delle due coppie si ottiene considerando le due coppie di denti equivalenti ad un sistema di molle in parallelo e considerando lo spessore b della ruota:

$$K_C = b[m] \cdot (K_A + K_B) \qquad \left[\frac{N}{m}\right] \quad \textbf{(12)}$$

Per quanto riguarda la rigidezza ($K_S$) della singola coppia in presa nel tratto BC questa viene calcolata usando la (2) e tenendo in considerazione lo spessore del dente:

$$\mathrm{K_S} = b \cdot \frac{\mathrm{K_{BC1}} \cdot \mathrm{K_{BC2}}}{\mathrm{K_{BC1}} + \mathrm{K_{BC2}}} \qquad \left[\frac{N}{m}\right] \quad \textbf{(13)}$$

# Riferimenti

**[1]** J.H. Kuang, Y.T. Yang, *An estimate of mesh stiffness and load sharing ration of a spur gear pair*, International Power Transmission and Gearing Conference, Vol 1, DE-vol 43-1, ASME, 1992.

ESERCIZIO

Si calcoli il valore della rigidezza di ingranamento per la seguente coppia di ruote:

```
%===========================================================================
========================
% Struttura dei dati.
ruota_1.z            = 40;           % Numero denti.
ruota_1.m            = 2.5*10^-3;    % Modulo in [m].
ruota_1.alfa         = pi/9;         % Angolo di pressione  [rad].
ruota_1.X            = 0;            % Coefficiente di correzione.
ruota_1.ep           =1.2;           %fattore di ricoprimento
ruota_1.b            = 9*10^-3;     %larghezza di fascia [m]
ruota_2.z            = 22;           % Numero denti.
ruota_2.m            = ruota_1.m;    % Modulo in [m].
ruota_2.alfa         = ruota_1.alfa; % Angolo di pressione  [rad].
ruota_2.X            = 0;            % Coefficiente di correzione.
ruota_2.b=ruota_1.b;
```

Confrontare la rigidezza di ingranamento ottenuta con i dati forniti con quella ricavata variando il numero di denti (ruota_1.z=100, ruota_2.z=15)e lo spessore di fascia (20mm per la ruota 1 e 15mm per la ruota 2.

Graficare la rigidezza di ingranamento in N/m e mostrarla in funzione della rotazione angolare espressa in gradi.

## TRACCIA DI SOLUZIONE

1. **calcolare raggio primitivo,raggio base, raggio di testa, passo angolare** (`ruota_1.R0 = ruota_1.m*ruota_1.z/2;     % Raggio primitivo`) **e il raggio di primo contatto** (`ruota_1.Rmin` ).
2. **definire i punti A,B,C,D**

```
A=0;
B=(ruota_1.ep-1)*2*pi/ruota_1.z;
C=2*pi/ruota_1.z;
D=ruota_1.ep*2*pi/ruota_1.z;
```

3. **definire i coefficienti $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$,**
4. **Per il tratto AB, definire**

```
tetaAB = linspace(A,B); crea un vettore di numero (angoli) da A a B
```

**e poi definire rAB1, rAB2 usando le formule (10-11). Poi definire la rigidezza del singolo dente KAB1 e KAB2 usando la formula (1)**

5. **Analogamente per il tratto CD**
6. **Analogamente per il tratto BC**
7. **definire le Rigidezze relative alle coppie di denti A e B,cioè relative ai tratti AB e CD, usando le formule 3-4 (la coppia A è in contatto nel tratto AB e la coppia B nel tratto CD. La coppia A è quella che inizia l'ingranamento, la B è quella già in presa che precede la A.**

```
KA = (KAB1.*KAB2)./(KAB1+KAB2); %%rigidezza della coppia A
KB = (KCD1.*KCD2)./(KCD1+KCD2);   %rigidezza della coppia B
K_C=ruota_1.b*(KA+KB);  %rigidezza di entrambe le coppie [N/m]
```

8. **Definire la Rigidezza relativa alla sola coppia in presa nel tratto BC, usando la formula 2**

```
 K_S = ruota_1.b*((KBC1.*KBC2)./(KBC1+KBC2));  %rigidezza della singola coppia
[N/m]
```

9. **creare un vettore con il segmento d’azione completo (AD) e con la rigidezza di ingranamento completa**

```
tetaAD=[tetaAB,tetaBC,tetaCD]*180/pi;
rig_ingran3=[K_C K_S K_C]
```

**Esempio di soluzione**