Seconda Prova Parziale di Algebra e Geometria

(Corso di Laurea in Chimica a.a. 2014-2015)

12 dicembre 2014

1. Siano $\mathbf{v} = (6, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (3, -2, 1)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$.

   a) Vedere se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

   b) Trovare un vettore ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$.

   c) Trovare un vettore $\mathbf{u}$ tale che $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

   d) Calcolare il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ e le norme dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

2. Sia $S = \{(1, 2, 1, -1); (2, 4, k + 3, -2); (0, 1, 1, k^2 - 1)\} \subset \mathbb{R}^4$, con $k \in \mathbb{R}$.

   1) Determinare una base e la dimensione dello spazio $[S]$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

   2) Posto $k = -1$, dire se il vettore $\mathbf{v} = (3, 5, 3, -3)$ appartiene a $[S]$.

3. Diagonalizzare con una matrice ortogonale U la seguente matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Controllare che le tre colonne della matrice U che diagonalizza A costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

4. Sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (2k - 1)x + ky + z = 1 \\ 5x + y + z = k \\ y + kz = 1 \end{cases}$$

   i) discutere il numero di soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$;

   ii) risolvere il sistema SOLO per $k = 1$.

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare così definita:

$$f((x, y, z)) = (x + y, x + 2y - z, x + 3y - 2z)$$

   i) Determinare la matrice $A = \mathrm{mat}(f; \mathcal{C}, \mathcal{C})$ associata ad f rispetto alla base canonica.

   ii) Determinare una base e la dimensione di $Im(f)$ e stabilire se f è suriettiva.

   iii) Determinare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e stabilire se f è iniettiva.

   iv) Siano $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, -1)\}$ due basi di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice $M = \mathrm{mat}(f; \mathcal{B}', \mathcal{B})$ associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}$.

FACOLTATIVO. Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(A) = A - A^T$$

Determinare $Ker(f)$ e $Im(f)$.