Appello di Algebra e Geometria

(Corso di Laurea in Chimica a.a. 2014-2015)

16 gennaio 2015

1. Siano in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v_1} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v_2} = (0, -2, 1)$, $\mathbf{v_3} = (1, -1, -1)$.
   i) Mostrare che $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   ii) Determinare un vettore ortogonale sia a $\mathbf{v_2}$ che a $\mathbf{v_3}$.
   iii) Calcolare $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{w}$, dove $\mathbf{w} = (16, -1, 15)$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare così definita:
$$f((x, y, z)) = (x + y + 3z, -x + 2y, -3x - y - 7z)$$
   i) Determinare la matrice $A = \mathrm{mat}(f; \mathcal{C}, \mathcal{C})$ associata ad f rispetto alla base canonica.
   ii) Determinare una base e la dimensione di $Im(f)$ e stabilire se f è suriettiva.
   iii) Determinare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e stabilire se f è iniettiva.
   iv) Siano $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (-1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ due basi di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice $M = \mathrm{mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

3. Siano a e b due permutazioni del gruppo simmetrico S_5, dove
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
   calcolare l'ordine di a e b. Determinare a^{-1}, b^{-1}, a^4b^{-1} e b^7a e calcolare l'ordine di tutti questi elementi.

4. Risolvere, con il metodo della matrice inversa, il seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} -x - 5y + 4z = 10 \\ x + 3y = -4 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

5. Discutere il seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} -x + y + k\,z = 0 \\ y + (k - 6)\,z = 0 \\ 4x + (k - 6)\,y + z = 0 \end{cases}$$
   Risolvere il sistema per i valori di k per i quali il sistema è di Cramer.

6. Diagonalizzare con una matrice ortogonale la seguente matrice simmetrica:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

FACOLTATIVO. Siano $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 5x + x^2 + kx^3$, $p_3(x) = x^2 - 2x^3$ polinomi in $P_3(x)$. Sia $V = [p_1(x), p_2(x), p_3(x)]$ lo spazio generato da $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$. Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ risulta $\dim V = 2$.