Prima Prova Parziale di Algebra e Geometria

(Corso di Laurea in Chimica a.a. 2014-2015)

13 novembre 2014

1. Siano in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v_1} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v_2} = (-1, 1, 3)$, $\mathbf{v_3} = (1, -2, -2)$. [5 punti]

   i) Mostrare che $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

   ii) Scrivere le componenti del vettore $\mathbf{u} = (3, 4, -1)$ rispetto alla base $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$.

2. Risolvere, con il metodo di Cramer, il seguente sistema lineare: [4 punti]

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ 2x + 2z - 2y - 5 = 0 \\ y - z + 4x = 0 \end{cases}$$

   [Calcolare almeno 2 determinanti mediante lo sviluppo rispetto ad una riga o ad una colonna].

3. Risolvere, con il metodo della matrice inversa, il seguente sistema lineare: [5 punti]

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 3 \\ 4x - 5y + 2z = -2 \end{cases}$$

4. Dire se $E = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 2a-b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. [3 punti]

5. Trovare un insieme di generatori, una base e determinare la dimensione del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: [5 punti]

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x + y + kz, kx + 2y + 3z, x + y + z) \right\}$$

6. Dato il seguente insieme di polinomi di $\mathbb{P}_3(x)$: [5 punti]

$$S = \left\{ p_1(x) = x^3 - 2x^2 + 1;\ p_2(x) = x^2 + x - 2;\ p_3(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 5 \right\}$$

   i) dire se sono linearmente indipendenti o dipendenti;

   ii) determinare una base e la dimensione dello spazio W generato da S;

   iii) completare la base di W per ottenere una base di $\mathbb{P}_3(x)$ (dimostrare che l'insieme ottenuto è linearmente indipendente).

7. Siano a e b due permutazioni del gruppo simmetrico S_6, dove [3 punti]

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   determinare a^{-1}, b^{-1}, $a^{-1}b$ e b^8a^3 e calcolare l'ordine di tutti questi elementi.

FACOLTATIVO. Dimostrare che il determinante di una qualsiasi *matrice antisimmetrica* 3×3 è uguale a zero.