ALGEBRA E GEOMETRIA
Esercizi
Corso di Laurea in Chimica - anno acc. 2015/2016
docente: Elena Polastri, plslne@unife.it

Esercizi 6: DIAGONALIZZAZIONE e APPLICAZIONI LINEARI

Matrici ortogonali.

1. Verificare che le seguenti matrici sono ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Soluzione. Basta applicare la definizione: A è ortogonale se $\det A \neq 0$ e se $A^t \cdot A = I$.

2. Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \alpha \\ \alpha & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

risulti ortogonale.

Soluzione. $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$

Diagonalizzazione di una matrice.

3. Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione. A è diagonalizzabile con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. A è diagonalizzabile con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione. A è diagonalizzabile con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

6. Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. A è diagonalizzabile con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. A non è diagonalizzabile.

8. Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. A non è diagonalizzabile.

9. Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla:

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 \\ -14 & 10 & 0 \\ -14 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. A è diagonalizzabile con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

10. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. A è diagonalizzabile per $\alpha \neq -1$.

11. Siano:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Dire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla.
b) Stabilire se A e B sono simili.

Soluzione.

a) A è diagonalizzabile con

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Poiché A è diagonalizzabile, A e B sono simili se e solo se B è diagonalizzabile ed ha gli stessi autovalori di A con la stessa molteplicità. B non è diagonalizzabile, quindi A e B non sono simili.

12. Diagonalizzare con una matrice ortogonale la seguente matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Abbiamo

$$U=\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

13. Diagonalizzare con una matrice ortogonale la seguente matrice simmetrica:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Abbiamo

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{17}} & -\dfrac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & -\dfrac{4}{\sqrt{17}} & -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

14. Diagonalizzare con una matrice ortogonale la seguente matrice simmetrica:

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Abbiamo

$$U=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

15. Diagonalizzare con una matrice ortogonale la seguente matrice simmetrica:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Abbiamo

$$U=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Applicazioni lineari.

16. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, y + z)$ un'applicazione lineare.

i) Determinare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e stabilire se f è iniettiva.
ii) Determinare una base e la dimensione di $Im(f)$ e stabilire se f è suriettiva.
iii) Calcolare $\mathbf{w} = f((2, 1, 3))$ e determinare $f^{\leftarrow}((\mathbf{w}))$.

Soluzione.

i) Abbiamo che $\{(1, -1, 1)\}$ è una base di $Ker(f)$, quindi $\dim Ker(f) = 1$ e f non è iniettiva.
ii) Abbiamo che $\{(1, 0); (2, 1)\}$ è una base di $Im(f)$, quindi $\dim Im(f) = 2$ e f è suriettiva perché $Im(f) \equiv \mathbb{R}^2$.
iii) $\mathbf{w} = (7, 4)$ e $f^{\leftarrow}(\mathbf{w}) = \{(z - 1, 4 - z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

17. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z, t) \mapsto (x - 5t, y + z + t, x - y - z - t)$ un'applicazione lineare.

i) Scrivere la matrice A associata ad f.
ii) Trovare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.

Soluzione.

ii) $\{(1, 0, 1); (0, 1, -1); (-5, 1, -1)\}$ base di $Im(f)$, con $\dim Im(f) = 3$ e $\{(0, 1, -1, 0)\}$ base di $Ker(f)$, con $\dim Ker(f) = 1$.

18. Sia f l'applicazione lineare in $\mathbb{R}^3$ per la quale

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1, 2) \qquad f((0, 1, 0)) = (-1, 1, 0) \qquad f((0, 0, 1)) = (1, -2, -1)$$

i) Scrivere $f((x, y, z))$.
ii) Trovare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.
iii) Dire se f è iniettiva e/o suriettiva.
iv) Discutere l'appartenenza di $(0, \alpha, 1)$ a $Im(f)$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
v) Determinare $f^{\leftarrow}((1, 0, 0))$ e $f^{\leftarrow}((0, -2, -2))$.

Soluzione.

ii) $\{(1, 1, 2); (-1, 1, 0)\}$ base di $Im(f)$, con $\dim Im(f) = 2$ e $\{(1, 3, 2)\}$ base di $Ker(f)$, con $\dim Ker(f) = 1$.
iv) $(0, \alpha, 1) \in Im(f)$ se $\alpha = 1$.
v) $f^{\leftarrow}((1, 0, 0)) = \emptyset$ e $f^{\leftarrow}((0, -2, -2)) = \left\{ \left(\frac{z-2}{2}, \frac{3z-2}{2}, z \right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$.

19. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (3x - y + 2z, -y + \alpha\, z, x + 3z)$ un'applicazione lineare.

i) Scrivere la matrice A associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.
ii) Trovare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

ii) Se $\alpha = -7$, abbiamo che $\dim Im(f) = 2$ e $\dim Ker(f) = 1$. Se $\alpha \neq -7$, abbiamo che $\dim Im(f) = 3$ e $\dim Ker(f) = 0$, in tal caso f è iniettiva e suriettiva, ossia biiettiva.

20. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x + y, x + y, y + kz)$ un'applicazione lineare, dove $k \in \mathbb{R}$.

i) Scrivere la matrice A associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.
ii) Trovare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
iii) Stabilire se il vettore $\mathbf{v} = (3, -1, -5)$ appartiene a $Im(f)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

ii) Se $k = 0$, abbiamo che $\dim Im(f) = 2$ e $\dim Ker(f) = 1$. Se $k \neq 0$, abbiamo che $\dim Im(f) = 3$ e $\dim Ker(f) = 0$, in tal caso f è iniettiva e suriettiva, ossia biiettiva.
iii) Abbiamo che $\mathbf{v} \in Im(f)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

21. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica, dove $k \in \mathbb{R}$.

i) Trovare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
ii) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare è invertibile.

Soluzione. Se $k = 0$, abbiamo che $\dim Im(f) = 2$ e $\dim Ker(f) = 1$.
Se $k \neq 0$, abbiamo che $\dim Im(f) = 3$ e $\dim Ker(f) = 0$, in tal caso f è iniettiva e suriettiva, ossia biiettiva e quindi invertibile.

Cambiamento di base.

22. Siano $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$ rispettivamente la base canonica e una base di $\mathbb{R}^3$. Dati i vettori $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ le cui componenti sono scritte rispetto la base $\mathcal{C}$ e $\mathbf{w} = (0, -1, 4)$ le cui componenti sono scritte rispetto alla base $\mathcal{B}'$, determinare le matrici di cambiamento di base $P = \mathrm{mat}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{C}, \mathcal{B}')$, $P^{-1} = \mathrm{mat}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}', \mathcal{C})$, le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ e le componenti di $\mathbf{w}$ rispetto alla base canonica.

Soluzione.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}_{\mathcal{B}'} = (3, 2, 3)$, $\mathbf{w}_{\mathcal{C}} = (9, -1, 0)$

23. Siano $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,1,2),(2,-1,1),(3,1,2)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ rispettivamente la base canonica e due basi di $\mathbb{R}^3$.

- Determinare le matrici $P = \mathrm{mat}(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{C},\mathcal{B})$, $P^{-1} = \mathrm{mat}(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B},\mathcal{C})$;
- dato il vettore $\mathbf{v} = (0,1,3)$ le cui componenti sono scritte rispetto alla base canonica, determinare le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$;
- determinare le matrici $Q = \mathrm{mat}(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}',\mathcal{B})$, $Q^{-1} = \mathrm{mat}(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Soluzione.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -1)$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Cambiamento di base e applicazioni lineari.

24. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (2x, y+z)$ un'applicazione lineare.

i) Scrivere la matrice $A = \mathrm{mat}(f;\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2)$ associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.
ii) Trovare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.
iii) Sia $\mathcal{B} = \{(2,1,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice $P = \mathrm{mat}(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{C},\mathcal{B})$ di cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$.
iv) Determinare la matrice P^{-1} e determinare le componenti del vettore $\mathbf{w} = (1,1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
v) Determinare la matrice $B = \mathrm{mat}(f;\mathcal{B},\mathcal{C}_2)$ associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione.

ii) $\{(2,0);(0,1)\}$ base di $Im(f)$, con $\dim Im(f) = 2$ e $\{(0,-1,1)\}$ base di $Ker(f)$, con $\dim Ker(f) = 1$.
iii) Abbiamo che:
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
iv) Abbiamo che:
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{w}_{\mathcal{B}} = P\,W = (0,1,1)$.

v) Abbiamo che:

$$B = A\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (x+y, 2x-y-z, 2y+z)$ un'applicazione lineare e $\mathcal{B} = \{(1,2,-4),(0,1,1),(1,0,-7)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$.

i) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

ii) Determinare la matrice $B = \text{mat}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione.

i) L'applicazione f è iniettiva e suriettiva, in quanto $\dim Im(f) = 3$ e $\dim Ker(f) = 0$.

iii) Abbiamo che:

$$B = \begin{pmatrix} 17 & 12 & -9 \\ -30 & -26 & 27 \\ -14 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$

26. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (3x-2y, x+y+z, 2x-3y-z)$ un'applicazione lineare e $\mathcal{B} = \{(2,1,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$.

i) Trovare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.

ii) Determinare la matrice $B = \text{mat}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione.

i) $\{(3,1,2);(-2,1,-3)\}$ base di $Im(f)$, con $\dim Im(f) = 2$ e $\{(2,3,-5)\}$ base di $Ker(f)$, con $\dim Ker(f) = 1$.

ii) Abbiamo che:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

27. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto (2x, x-y, 2y)$ un'applicazione lineare e siano $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,2)\}$ due basi di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente. Determinare la matrice $A = \text{mat}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

28. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \mathrm{mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,2,2),(0,0,3)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

i) Scrivere la matrice $M = \mathrm{mat}(f; \mathcal{C}, \mathcal{C})$ associata ad f rispetto alle basi canoniche.

ii) Utilizzando M, trovare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$ e dire se f è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione.

i) Abbiamo che:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

ii) $\{(0,2,2);(0,2,11)\}$ base di $Im(f)$, con $\dim Im(f) = 2$ e $\{(1,0,0)\}$ base di $Ker(f)$, con $\dim Ker(f) = 1$. L'applicazione f non è né iniettiva né suriettiva.

29. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \mathrm{mat}(f; \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica e sia $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,1,1),(1,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$

i) Scrivere la matrice $M = \mathrm{mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{C})$ associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

ii) Scrivere la matrice $M' = \mathrm{mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia nel dominio che nel codominio.

Soluzione.

i) Abbiamo che:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ii) Abbiamo che:

$$M' = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$