ALGEBRA E GEOMETRIA
Esercizi
Corso di Laurea in Chimica - anno acc. 2015/2016
docente: Elena Polastri, plslne@unife.it

Esercizi 5: SPAZI VETTORIALI, MATRICI e SISTEMI LINEARI

Operazioni tra vettori.

1. Siano $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 4, -2)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$.
   a) Vedere se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
   b) Trovare un vettore ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$.
   c) Trovare un vettore $\mathbf{u}$ tale che $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

2. Siano $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$.
   a) Vedere se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
   b) Trovare un vettore ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$.
   c) Trovare un vettore $\mathbf{u}$ tale che $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

3. Siano $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$.
   a) Calcolare $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.
   b) Dire se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
   c) Trovare un vettore $\mathbf{u}$ tale che $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.
   d) Trovare un vettore ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$.

4. Siano $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$.
   a) Calcolare $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.
   b) Dire se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
   c) Trovare un vettore $\mathbf{u}$ tale che $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.
   d) Trovare un vettore ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$.

5. Calcolare il prodotto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, dove $\mathbf{a} = (3, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$ e $\mathbf{c} = (0, -2, 4)$.

Rango di una matrice.

6. Determinare, mediante il Teorema degli orlati, il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & -12 \end{pmatrix}$$

Soluzione. $\text{rk}(A) = 2$; $\text{rk}(B) = 3$; $\text{rk}(C) = 2$.

7. Determinare, mediante il Teorema degli orlati, il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ 5 & -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Soluzione. $\mathrm{rk}(A) = 2$; $\mathrm{rk}(B) = 2$.

8. Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$ il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ k & 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Se $k \neq 4$, $\mathrm{rk}(A) = 3$; se $k = 4$ $\mathrm{rk}(A) = 2$.

9. Sia

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & \beta & 3 \end{pmatrix}$$

1) Determinare per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il rango di A.
2) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che A sia invertibile e per tali valori trovare $\det(A^{-1})$ e A^{-1}.

Soluzione.

1) $\mathrm{rk}(A) = 3$ per ogni $\alpha \neq 0$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$; $\mathrm{rk}(A) = 2$ se $\alpha = 0$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.
2) A è invertibile se e solo se $\alpha \neq 0$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, con $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{6\,\alpha}$.

10. Sia $S = \{(1, 1, 1, 1); (2, 1, -1, 1); (0, 1, 3, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

1) Determinare una base e la dimensione di dello spazio $[S]$.
2) Dire se $\mathbf{w} = (7, 5, 1, 5)$ appartiene a $[S]$.
3) Dire se $\mathbf{u} = (1, -3, 1, -2)$ appartiene a $[S]$.

Soluzione.

1) $\dim[S] = 2$.
2) $\mathbf{w} \in [S]$.
3) $\mathbf{u} \notin [S]$.

11. Sia $S = \{(1, 2, -1, 4); (2, 4, 3, 5); (-1, -2, 6, -7)\} \subset \mathbb{R}^4$.

1) Determinare una base e la dimensione di dello spazio $[S]$.
2) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (-1, \alpha, 2\alpha, -1)$ appartiene a $[S]$.

Soluzione.
1) $\dim[S] = 2$.
2) Se $\alpha = -2$, $\mathbf{v} \in [S]$, se $\alpha \neq -2$, $\mathbf{v} \notin [S]$.

12. Sia $V = [p_1(x), p_2(x), p_3(x)] \subset \mathbb{P}_3(x)$ lo spazio generato dai polinomi $p_1(x) = x^2$, $p_2(x) = kx^3 - x^2 + 3x$, $p_3(x) = -4x^3 - 2x$. Determinare $\dim V$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Se $k = 6$ allora $\dim V = 2$, se $k \neq 6$ allora $\dim V = 3$.

Sistemi lineari.
Discutere e risolvere i seguenti sistemi lineari applicando il teorema di Rouché-Capelli.

13.
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y - 3z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

Soluzione. ∞^1 soluzioni: $S = \{(2 + z, 2z - 1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

14.
$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 2x + 4y - z = 3 \\ 3x + 5y + 2z = 4 \end{cases}$$

Soluzione. ∞^1 soluzioni: $S = \left\{ \left(\dfrac{1 - 13z}{2}, \dfrac{7z + 1}{2}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$

15.
$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ 3x - 4y + 4z + 4t = 2 \\ x - 5y + 3z + 4t = 1 \end{cases}$$

Soluzione. ∞^1 soluzioni: $S = \left\{ \left(\dfrac{10 - 12t}{17}, \dfrac{16t - 2}{17}, \dfrac{8t - 1}{17}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

16.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$$

Soluzione. ∞^2 soluzioni: $S = \{(z + 2t, -2z - 3t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$

17.
$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z + 6t = 1 \\ 3x - 6y + z + 9t = 2 \end{cases}$$

Soluzione. ∞^2 soluzioni: $S = \left\{ \left(x, y, -\dfrac{1}{7}, \dfrac{-7x + 14y + 5}{21} \right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

18.
$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \\ x + ky = -1 \end{cases}$$

Soluzione. Per $k = 0$ abbiamo un'unica soluzione $S = \{(-1, 2)\}$.
Per $k \neq 0$ il sistema non ammette soluzioni.

19.
$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Per ogni k abbiamo un'unica soluzione $S = \{(0, 0)\}$.

20.
$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -x + 4y = 0 \\ 4x + 2y + \beta\, z = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Per $\beta \neq 3$ abbiamo un'unica soluzione $S = \{(0, 0, 0)\}$.
Per $\beta = 3$ abbiamo ∞^1 soluzioni: $S = \left\{ \left(-\frac{2}{3}\, z, -\frac{z}{6}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$.

21.
$$\begin{cases} 2x - 2y + z = \alpha \\ -x + 4y = 6 \\ 4x + 2y + \beta\, z = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Per $\beta \neq 3$ abbiamo un'unica soluzione
$$S = \left\{ \left(\frac{4(\alpha\,\beta + 3\beta + 3)}{6\beta - 18}, \frac{12\beta - 24 + \alpha\,\beta}{6\beta - 18}, \frac{-3\alpha - 12}{\beta - 3} \right) \right\}.$$
Per $\beta = 3$ e $\alpha = -4$ abbiamo ∞^1 soluzioni: $S = \left\{ \left(\frac{-2z - 2}{3}, \frac{8 - z}{6}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$.
Per $\beta = 3$ e $\alpha \neq -4$ il sistema non ammette soluzione.

22. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema:
$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = k \\ kx + y + 2z = 0 \end{cases}$$
Risolvere poi il sistema per $k = -3$ e per $k = 1$.

Soluzione. Si ha che $\det A = 1 - k^2$. Risolvendo l'equazione di II grado associata, si trova subito che se $k \neq \pm 1$, allora $\det A \neq 0$, il sistema è di Cramer e quindi ha una sola soluzione.

Se $k = 1$ il rango di $A|B$ e il rango di A sono uguali a 2, il sistema ammette ∞^1 soluzioni $S = \{(x; 2 - x; -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Se $k = -1$ il rango di $A|B$ è 3 e il rango di A è 2, dunque il sistema non ammette soluzioni.
Ponendo $k = -3$ il sistema è di Cramer, quindi esiste una sola soluzione (ottenuta applicando la regola di Cramer) $S = \{(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; 3)\}$.