ALGEBRA E GEOMETRIA
Esercizi

Corso di Laurea in Chimica - anno acc. 2015/2016

docente: Elena Polastri, plslne@unife.it

Esercizi 4: SPAZI VETTORIALI e SISTEMI LINEARI

Indipendenza e Dipendenza lineare.

1. Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti o indipendenti:
   1) $S = \{(1,0,0); (0,1,1); (3,5,5)\}$ [S lin. dip.]
   2) $S = \{(1,-2,3); (5,6,7); (-2,4,-6)\}$ [S lin. dip.]
   3) $S = \{(2,57,49); (6,8,7); (5,4,-3)\}$ [S lin. indip.]

2. Siano in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{v} = (2,1,0)$.
   i) Mostrare che i tre vettori sono a due a due linearmente indipendenti.
   ii) Mostrare che $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{v}\}$ non è linearmente indipendente.
   iii) Sia $\mathbf{w} = (4,3,0)$, scrivere $\mathbf{w}$ come combinazione lineare di $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{v}$ in due modi diversi.

3. Siano in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v} = (1,2,1)$, $\mathbf{w} = (2,3,3)$, $\mathbf{t} = (3,7,1)$. Mostrare che i tre vettori sono linearmente indipendenti.

4. Discutere la lineare dipendenza o indipendenza dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ al variare di $k \in \mathbb{R}$:
   a) $S = \{(1,2,-1); (1,1,1); (k,3,-3)\}$
   b) $S = \{(1,1,k); (k,2,3); (1,1,1)\}$

   Soluzione.
   a) Se $k \neq 1$, allora S è linearmente indipendente; se $k = 1$, allora S è linearmente dipendente.
   b) Se $k \neq 1$ e $k \neq 2$, allora S è linearmente indipendente; se $k = 1$ oppure $k = 2$, allora S è linearmente dipendente.

5. Determinare se i seguenti polinomi in $\mathbb{P}(x)$ (spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali) sono linearmente indipendenti o dipendenti:

$$p_1(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 3; \quad p_2(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 1; \quad p_3(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 5$$

   Soluzione. I polinomi sono linearmente indipendenti.

6. Determinare se i seguenti polinomi in $\mathbb{P}(x)$ (spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali) sono linearmente indipendenti o dipendenti:

$$p_1(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 3; \quad p_2(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 4; \quad p_3(x) = 2x^3 - 7x^2 - 7x + 9$$

   Soluzione. I polinomi sono linearmente dipendenti.

Spazi vettoriali: basi e dimensione.

7. Dire se i seguenti insiemi di vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ oppure no, motivando la risposta:

1) $\{(1,1,1);(1,0,1)\}$ [No]
2) $\{(1,2,3);(1,3,5);(1,0,1);(2,3,0)\}$ [No]
3) $\{(1,1,1);(1,2,3);(2,-1,1)\}$ [Si]
4) $\{(1,1,2);(1,2,5);(5,3,4)\}$ [No]

8. Considerato il sottoinsieme $\{(-1,2,2),(2,2,-1),(3,0,-3),(2,-1,2)\}$ di $\mathbb{R}^3$, dire se è linearmente dipendente o indipendente. Determinare un suo sottoinsieme che sia una base di $\mathbb{R}^3$.

9. Considerato il sottoinsieme $\{(1,1,1),(0,3,2),(1,0,0),(2,1,-1)\}$ di $\mathbb{R}^3$, dire se è linearmente dipendente o indipendente. Determinare un suo sottoinsieme che sia una base di $\mathbb{R}^3$.

10. Dimostrare che i vettori $\mathbf{v} = (1,-1,2,3)$ e $\mathbf{w} = (3,0,4,-2)$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti. Aggiungere ai vettori dati altri due in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^4$.

11. Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Mostrare che l'insieme dei quattro vettori $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$ è linearmente dipendente.

12. Siano in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v_1} = (1,1,0)$, $\mathbf{v_2} = (1,0,2)$, $\mathbf{v_3} = (0,2,2)$.

i) Mostrare che $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
iii) Scrivere $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ come combinazione lineare di $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$).

13. Sia $B = \{\mathbf{v_1} = (0,1,-1),\ \mathbf{v_2} = (1,0,1),\ \mathbf{v_3} = (1,-1,3)\} \subset \mathbb{R}^3$.

i) Mostrare che $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
ii) Sia $\mathbf{w} = (1,0,2) \in \mathbb{R}^3$, le cui coordinate sono scritte rispetto alla base canonica. Scrivere le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base B.
iii) Sia $\mathbf{u} = (1,-2,1) \in \mathbb{R}^3$, le cui coordinate sono scritte rispetto alla base B. Scrivere le coordinate di $\mathbf{u}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

14. Trovare un insieme di generatori, una base e determinare la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

1) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x - y - 2z = 0\}$ $[\dim W = 2]$
2) $W = \{(4x - y + 2z, 3x + y, x) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ $[\dim W = 3]$
3) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}\right\}$ $[\dim W = 1]$
4) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}\right\}$ $[\dim W = 1]$
5) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x - 3y + z = 0\}$ $[\dim W = 2]$
6) $W = \{(x - y + 2z, 3x + y, x - z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ $[\dim W = 3]$

15. Trovare un insieme di generatori, una base e determinare la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ al variare di $k \in \mathbb{R}$:

1) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + ky - z = 0 \end{cases}\right\}$
2) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} 2x - y = 0 \\ kz = 0 \end{cases}\right\}$
3) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} y - 3z = 0 \\ y + kz = 0 \end{cases}\right\}$
4) $W = \{(x, x + y, x + y + kz) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Soluzione.

1) Se $k \neq 1$, $\dim W = 1$; se $k = 1$, $\dim W = 2$.
2) Se $k \neq 0$, $\dim W = 1$; se $k = 0$, $\dim W = 2$.
3) Se $k \neq -3$, $\dim W = 1$; se $k = -3$, $\dim W = 2$.
4) Se $k \neq 0$, $\dim W = 3$; se $k = 0$, $\dim W = 2$.

Sistemi lineari.

16. Risolvere, con il metodo di Cramer, i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + 5z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$

Soluzione. a) $\{(1, 1, 0)\}$ b) $\{(1, 2, 3)\}$

17. Risolvere, con il metodo di Cramer, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 3 \\ 2x + 3y + 2z + t = 4 \\ y + 2z = 0 \\ 3x + 5z + 3t = 1 \end{cases}$$

Soluzione. $\left\{\left(\frac{5}{6}, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right\}$

18. Risolvere, con il metodo della matrice inversa, i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 7z = -2 \\ 2x + 3y + 6z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x + z = 4 \\ y - z = -1 \end{cases}$

Soluzione. a) $\{(27, 61, -39)\}$ b) $\{(1, 2, 3)\}$

19. Risolvere, o con il metodo di Cramer o con quello della matrice inversa, i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 8 \\ 2x - y + 4z = 7 \end{cases}$

Soluzione.

a) $\{(-1, 2, 1)\}$ b) $\{(2, -1, 1)\}$ c) $\{(2, 1, 1)\}$