ALGEBRA E GEOMETRIA
Esercizi
Corso di Laurea in Chimica - anno acc. 2015/2016
docente: Elena Polastri, plslne@unife.it

Esercizi 3: SPAZI VETTORIALI e MATRICI

Combinazioni lineari di vettori.

1. Scrivere il vettore $\mathbf{v} = (4, 9, 19)$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (3, -7, 10)$ e $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 9)$.

Soluzione. $\mathbf{v} = 4\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$.

2. Scrivere il vettore $\mathbf{v} = (1, -2, 5)$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{u}_3 = (2, -1, 1)$.

Soluzione. $\mathbf{v} = -6\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$.

3. Scrivere il vettore $\mathbf{v} = (0, 2, -2)$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1 = (4, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, -1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (-1, 3, -3)$.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}$ si scrive come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ in infiniti modi, uno di questi è $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 11\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$.

4. Scrivere il polinomio $q(x) = 2x^2 + x \in P_2(x)$ come combinazione lineare dei polinomi $p_1(x) = 2x^2 + x - 1$, $p_2(x) = x^2 - x + 3$ e $p_3(x) = -x^2 + x - 2$.

Soluzione. $q(x) = p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)$.

5. Scrivere il vettore $\mathbf{v} = (7, 5, 3)$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1 = (3, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 3, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (-1, 1, -3)$.

Soluzione. $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

6. Scrivere il vettore $\mathbf{v} = (2, 3, -5)$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, -4)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 7, -5)$.

Soluzione. Non è possibile scrivere $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.

7. Denotiamo con $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$ i versori degli assi di $\mathbb{R}^2$. Determinare gli scalari x, y in modo tale che il vettore $x(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + y(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ sia uguale a:
1) $\mathbf{j}$; 2) $3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; 3) $7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; 4) $\mathbf{i}$.

Soluzione. 1) Dobbiamo trovare x, y tali che

$$x(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + y(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{j}.$$

Abbiamo che $x\mathbf{i}-x\mathbf{j}+y\mathbf{i}+y\mathbf{j}=\mathbf{j}$, portando tutto al primo membro e successivamente raccogliendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ otteniamo

$$(x+y)\mathbf{i}+(-x+y-1)\mathbf{j}=\mathbf{0}.$$

Dunque abbiamo ottenuto una combinazione lineare di $\mathbf{i},\mathbf{j}$ uguale al vettore nullo. Poiché $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti, allora deve essere:

$$\begin{cases} x+y & = & 0 \\ -x+y-1 & = & 0. \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema di due equazioni in due incognite applicando il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x & = & -y \\ 2y-1 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -y \\ y & = & \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -\dfrac{1}{2} \\ y & = & \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2) Dobbiamo trovare x, y tali che

$$x(\mathbf{i}-\mathbf{j})+y(\mathbf{i}+\mathbf{j})=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}.$$

Abbiamo che $x\mathbf{i}-x\mathbf{j}+y\mathbf{i}+y\mathbf{j}=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}$, portando tutto al primo membro e successivamente raccogliendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ otteniamo

$$(x+y-3)\mathbf{i}+(-x+y+5)\mathbf{j}=\mathbf{0}.$$

Dunque abbiamo ottenuto una combinazione lineare di $\mathbf{i},\mathbf{j}$ uguale al vettore nullo. Poiché $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti, allora deve essere:

$$\begin{cases} x+y-3 & = & 0 \\ -x+y+5 & = & 0. \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema di due equazioni in due incognite applicando il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x & = & -y+3 \\ y-3+y+5 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -y+3 \\ 2y+2 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -y+3 \\ y & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 4 \\ y & = & -1. \end{cases}$$

3) Dobbiamo trovare x, y tali che

$$x(\mathbf{i}-\mathbf{j})+y(\mathbf{i}+\mathbf{j})=7\mathbf{i}+5\mathbf{j}.$$

Abbiamo che $x\mathbf{i}-x\mathbf{j}+y\mathbf{i}+y\mathbf{j}=7\mathbf{i}+5\mathbf{j}$, portando tutto al primo membro e successivamente raccogliendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ otteniamo

$$(x+y-7)\mathbf{i}+(-x+y-5)\mathbf{j}=\mathbf{0}.$$

Dunque abbiamo ottenuto una combinazione lineare di $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ uguale al vettore nullo. Poiché $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti, allora deve essere:

$$\begin{cases} x+y-7 &= 0 \\ -x+y-5 &= 0. \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema di due equazioni in due incognite applicando il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x &= -y+7 \\ y-7+y-5 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -y+7 \\ 2y-12 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -y+7 \\ y &= 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 6. \end{cases}$$

4) Dobbiamo trovare x, y tali che

$$x(\mathbf{i}-\mathbf{j}) + y(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \mathbf{i}.$$

Abbiamo che $x\mathbf{i}-x\mathbf{j}+y\mathbf{i}+y\mathbf{j} = \mathbf{i}$, portando tutto al primo membro e successivamente raccogliendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ otteniamo

$$(x+y-1)\mathbf{i} + (-x+y)\mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

Dunque abbiamo ottenuto una combinazione lineare di $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ uguale al vettore nullo. Poiché $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono linearmente indipendenti, allora deve essere:

$$\begin{cases} x+y-1 &= 0 \\ -x+y &= 0. \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema di due equazioni in due incognite applicando il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x &= -y+1 \\ y-1+y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -y+1 \\ y &= \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

8. Se $\mathbf{v}_1 = (2,-1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,-1)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-11,7)$ sono tre vettori di $\mathbb{R}^3$, determinare degli scalari x, y tali che $\mathbf{v}_3 = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2$.

Soluzione. La relazione $\mathbf{v}_3 = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2$ si traduce passando alle componenti nella relazione:

$$(2,-11,7) = x(2,-1,1) + y(1,2,-1).$$

Applicando le proprietà del prodotto per scalare e successivamente della somma di vettori otteniamo:

$$(2,-11,7) = (2x,-x,x) + (y,2y,-y), \quad (2,-11,7) = (2x+y,-x+2y,x-y).$$

Applicando la proprietà di uguaglianza tra vettori, deve essere:

$$\begin{cases} 2x+y &= 2 \\ -x+2y &= -11 \\ x-y &= 7. \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto un sistema lineare di tre equazioni in due incognite. Risolviamo tale sistema con il metodo di sostituzione (consideriamo solo la terza e la prima equazione):

$$\begin{cases} x &= y+7 \\ 2(y+7)+y &= 2 \\ -x+2y &= -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= y+7 \\ 2y+14+y &= 2 \\ -x+2y &= -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= y+7 \\ 3y &= -12 \\ -x+2y &= -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= y+7 \\ y &= -4 \\ -x+2y &= -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= -4 \\ -x+2y &= -11. \end{cases}$$

Il sistema ammette soluzione se e solo se la coppia $x = 3$, $y = -4$ soddisfa l'equazione $-x + 2y = -11$. Sostituendo a x e y nell'equazione $-x + 2y = -11$ i valori 3, -4 rispettivamente, otteniamo l'identità $-11 = -11$. Quindi il sistema ammette un'unica soluzione

$$\begin{cases} x &= 3 \\ y &= -4. \end{cases}$$

9. Dimostrare che l'esercizio precedente non ha soluzione se $\mathbf{v}_1$ è sostituito con il vettore $\mathbf{v}_4 = (1, 11, 7)$ e $\mathbf{v}_3$ è sostituito con il vettore $\mathbf{v}_5 = (2, 11, 2)$. Dunque, dimostrare che non esistono degli scalari x, y tali che $\mathbf{v}_5 = x\mathbf{v}_4 + y\mathbf{v}_2$.

Soluzione. La relazione $\mathbf{v}_5 = x\mathbf{v}_4 + y\mathbf{v}_2$ si traduce passando alle componenti nella relazione:

$$(2, 11, 2) = x(1, 11, 7) + y(1, 2, -1).$$

Applicando le proprietà del prodotto per scalare e successivamente della somma di vettori otteniamo:

$$(2, 11, 2) = (x, 11x, 7x) + (y, 2y, -y), \quad (2, 11, 2) = (x + y, 11x + 2y, 7x - y).$$

Applicando la proprietà di uguaglianza tra vettori, deve essere:

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ 11x+2y &= 11 \\ 7x-y &= 2. \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto un sistema lineare di tre equazioni in due incognite. Risolviamo tale sistema con il metodo di sostituzione (consideriamo solo la prima e la terza equazione):

$$\begin{cases} x = -y+2 \\ 7(-y+2)-y = 2 \\ 11x+2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y+2 \\ -7y+14-y = 2 \\ 11x+2y = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y+2 \\ -8y = -12 \\ 11x+2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y+2 \\ y = \dfrac{3}{2} \\ 11x+2y = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}+2 \\ y = \dfrac{3}{2} \\ 11x+2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \\ 11x+2y = 11 \end{cases}$$

Il sistema ammette soluzione se e solo se la coppia $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$ soddisfa l'equazione $11x + 2y = 11$. Sostituendo a x e y nell'equazione $11x + 2y = 11$ i valori $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ rispettivamente, otteniamo $\frac{17}{2} \neq 11$, ossia non otteniamo un'identità. Quindi il sistema non ammette soluzione.

Sottospazi vettoriali.

10. Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$.

1) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y - 3z = 0\}$ [Si]
2) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y - 3z = 1\}$ [No]
3) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - y = 1\}$ [No]
4) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0\}$ [No]
5) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y - 3z = 0,\ 2x - y + 3z = 0\}$ [Si]
6) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0\}$ [Si]
7) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z^2 = 0\}$ [No]
8) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2 - x - y + z = 0\}$ [No]

11. Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

1) $E = \left\{ A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ [Si]
2) $E = \left\{ A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$ [No]

3) $E = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a & a+b \\ b & 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ [Si]

4) $E = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a & ab \\ b & 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ [No]

5) $E = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ [No]

Inversa di una matrice.

12. Determinare, se esiste, l'inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Determinare, se esiste, l'inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Determinare, se esiste, l'inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare, se esiste, l'inversa A^{-1}.

16. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare, se esiste, l'inversa A^{-1}.

17. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti matrici A e B sono invertibili e per tali valori trovare A^{-1} e B^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Soluzione. A è invertibile per $\alpha \neq 2$, B è invertibile per $\alpha \neq 5$.