ALGEBRA E GEOMETRIA
Esercizi
Corso di Laurea in Chimica - anno acc. 2015/2016
docente: Elena Polastri, plslne@unife.it

Esercizi 1: GRUPPI e MATRICI

Gruppo simmetrico e gruppo diedrale.

1. Siano a e b due permutazioni del gruppo simmetrico S_5, dove

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

determinare a^{-1}, b^{-1}, ab, ba, a^3ba e b^3a e calcolare l'ordine di tutti questi elementi.

Soluzione. $a = (1\ 2\ 3\ 4)$, $o(a) = 4$; $a^{-1} = (1\ 4\ 3\ 2)$, $o(a^{-1}) = 4$;
$b = b^{-1} = (1\ 2)$, $o(b) = 2$; $ab = (1\ 3\ 4)$, $o(ab) = 3$; $ba = (2\ 3\ 4)$, $o(ba) = 3$;
$a^3ba = (1\ 4)$, $o(a^3ba) = 2$; $b^3a = ba$.

2. Siano a e b due permutazioni del gruppo simmetrico S_5, dove

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

determinare a^{-1}, b^{-1}, ab, ba, a^2b^2a, b^3a e a^2 e calcolare l'ordine di tutti questi elementi.

Soluzione. $a = (1\ 5\ 3)(2\ 4)$, $o(a) = 6$; $a^{-1} = (1\ 3\ 5)(2\ 4)$, $o(a^{-1}) = 6$;
$b = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$, $o(b) = 6$; $b^{-1} = (1\ 3\ 2)(4\ 5)$, $o(b^{-1}) = 6$;
$ab = (1\ 4\ 3\ 5\ 2)$, $o(ab) = 5$; $ba = (1\ 4\ 3\ 2\ 5)$, $o(ba) = 5$;
$a^2b^2a = (2\ 4\ 3\ 5)$, $o(a^2b^2a) = 4$; $b^3a = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$, $o(b^3a) = 5$; $a^2 = (1\ 3\ 5)$, $o(a^2) = 3$.

3. Siano a e b due permutazioni del gruppo simmetrico S_7, dove

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare a^{-1}, b^{-1}, $a^{-1}ba$ e ab^3 e calcolare l'ordine di tutti questi elementi.

Soluzione. $a = (1\ 3)(2\ 7\ 5\ 4\ 6)$, $o(a) = 10$; $a^{-1} = (1\ 3)(2\ 6\ 4\ 5\ 7)$, $o(a^{-1}) = 10$;
$b = (1\ 7)(2\ 6)(3\ 4\ 5)$, $o(b) = 6$; $b^{-1} = (1\ 7)(2\ 6)(3\ 5\ 4)$, $o(b^{-1}) = 6$;
$a^{-1}ba = (1\ 5\ 7)(2\ 3)(4\ 6)$, $o(a^{-1}ba) = 6$; $ab^3 = (1\ 5\ 4\ 6\ 7\ 3)$, $o(ab^3) = 6$.

4. Siano a e b due permutazioni del gruppo simmetrico S_6, dove

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

determinare a^{-1}, b^{-1}, ab, ba, $a^3b^{-1}a$ e b^2a^2 e calcolare l'ordine di tutti questi elementi.

Soluzione. $a = (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 4)$, $o(a) = 6$; $a^{-1} = (1\ 4\ 3\ 6\ 2\ 5)$, $o(a^{-1}) = 6$;
$b = (1\ 2\ 3)(4\ 6)$, $o(b) = 6$; $b^{-1} = (1\ 3\ 2)(4\ 6)$, $o(b^{-1}) = 6$;
$ab = (1\ 6)(2\ 4\ 3\ 5)$, $o(ab) = 4$; $ba = (1\ 5\ 3\ 6)(2\ 4)$, $o(ba) = 4$;
$a^3b^{-1}a = (1\ 3)(4\ 5\ 6)$, $o(a^3b^{-1}a) = 6$; $b^2a^2 = (4\ 5\ 6)$, $o(b^2a^2) = 3$.

5. Scrivere tutti gli elementi dei gruppi diedrali D_6 e D_7 e per ogni gruppo calcolare l'ordine di ogni elemento.

Soluzione. $D_6 = \{id, (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6), (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6), (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4),$
$(1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2), (2\ 6)(3\ 5), (1\ 3)(4\ 6), (1\ 5)(2\ 4), (1\ 6)(3\ 4)(2\ 5), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6),$
$(1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)\}$.
$D_7 = \{id, (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7), (1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6), (1\ 4\ 7\ 3\ 6\ 2\ 5), (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 4), (1\ 6\ 4\ 2\ 7\ 5\ 3),$
$(1\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2), (2\ 7)(3\ 6)(4\ 5), (1\ 3)(4\ 7)(5\ 6), (1\ 5)(2\ 4)(6\ 7), (1\ 7)(2\ 6)(3\ 5),$
$(1\ 2)(3\ 7)(4\ 6), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 7), (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)\}$.

Prodotto di Matrici. Calcolare, quando è possibile, il prodotto riga per colonna (RICO) delle seguenti matrici.

6. Calcolare, se è possibile, i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ -3 & 14 & -11 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 15 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$$

7. Calcolare, se è possibile, i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 19 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -9 \\ 19 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

8. Calcolare, se è possibile, i prodotti $A \cdot B$, $B \cdot A$ e $B \cdot A^t$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soluzione.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 36 & 58 & 56 \\ 19 & 37 & 27 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A^t = \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 35 & 21 \\ 71 & 27 \end{pmatrix}.$$

9. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare $A + B$, $A - B$, $-2\,A$, A^t, $3\,A + B^t$.

Inoltre dimostrare che

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \qquad \text{e} \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

10. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Soluzione.

$$A \cdot B = 0, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dimostrare che $A \cdot B = A \cdot C$. Risulta evidente che, se $A \cdot B = A \cdot C$, questo non implica necessariamente che sia $B = C$.