Monitoraggio e diagnostica dei sistemi meccanici

Gianluca D'Elia

Monitoraggio o diagnostica?

Dalla norma UNI ISO 13372

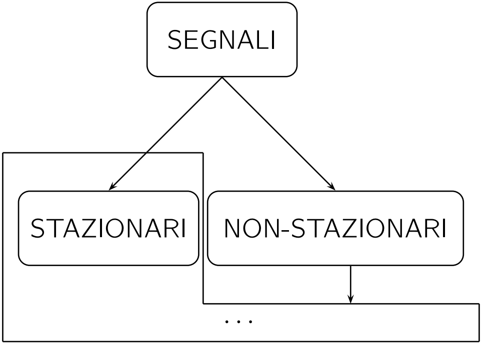
- Monitoraggio dello stadio: Ricerca e raccolta di informazioni e di dati che indichino lo stato di una macchina;
- Diagnostica: esame di sintomi e di sindromi per stabilire la natura dei difetti o dei guasti;

Introduzione

Il rilievo e lanalisi delle vibrazioni la tecnica pi diffusa per il monitoraggio delle macchine.
Fondamento:

- dopo la fase iniziale, il livello delle vibrazioni (”severitá di vibrazione”) tende a restare uniforme;
- dopo un certo periodo di funzionamento, per diverse cause, il livello tende ad aumentare in presenza di un danno incipiente;
- quando il livello supera un primo valore, scatta lallarme;
- quando il livello supera un secondo valore, é necessario arrestare la macchina.

Tipi di segnali



Analisi dei segnali stazionari

- Serie di Fourier
- Trasformata di Fourier
- Trasformata di Hilbert
- ...

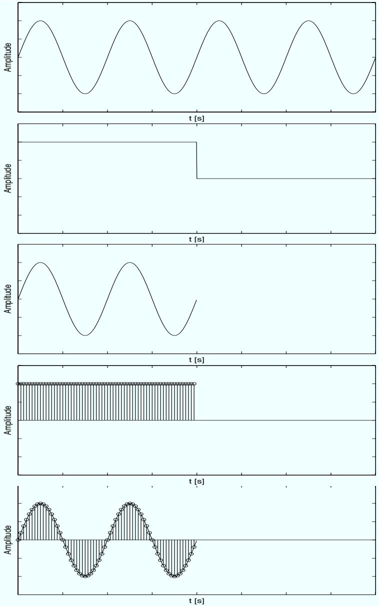
La Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Se una funzione viene rilavata solo per un certo intervallo di tempo finito, questo equivale ad applicare una finestra rettangolare alla funzione stessa.

I segnali campionati si presentano sotto forma di sequenze finite di valori numerici. Si opra su queste sequenze finite mediante la DFT

La DFT calcolata usando N campioni presi ai tempi:

$$t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, (N-1)\Delta t$$



La Trasformata Discreta di Fourier (DFT) - 2

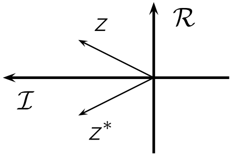
Si aveva: $X(k) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j2\pi k\frac{t}{T}}dt$ La DFT lavora solo su una piccola parte del segnale, trattandola come parte di un segnale periodico.

$$t \to n\Delta t \qquad dt \to \Delta t \qquad x(t) \to x(n) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

$$\{X\} = \frac{1}{N}[A]\{x(n)\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \nearrow & \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nwarrow \\ \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow \\ \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \nwarrow & \rightarrow & \swarrow \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \swarrow & \rightarrow & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \searrow \\ \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow \\ \uparrow & \nwarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \rightarrow & \nearrow \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{Bmatrix}$$



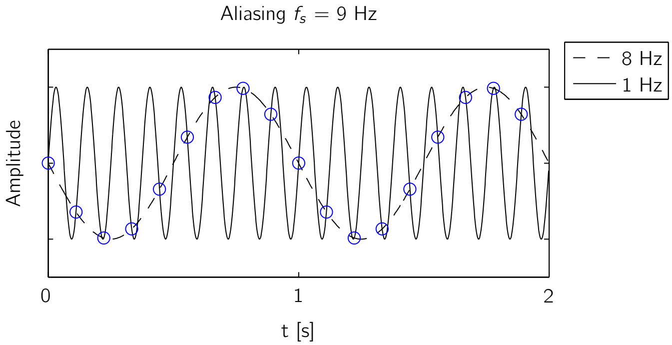
$$X(N-k) = X^*(k)$$

Aliasing

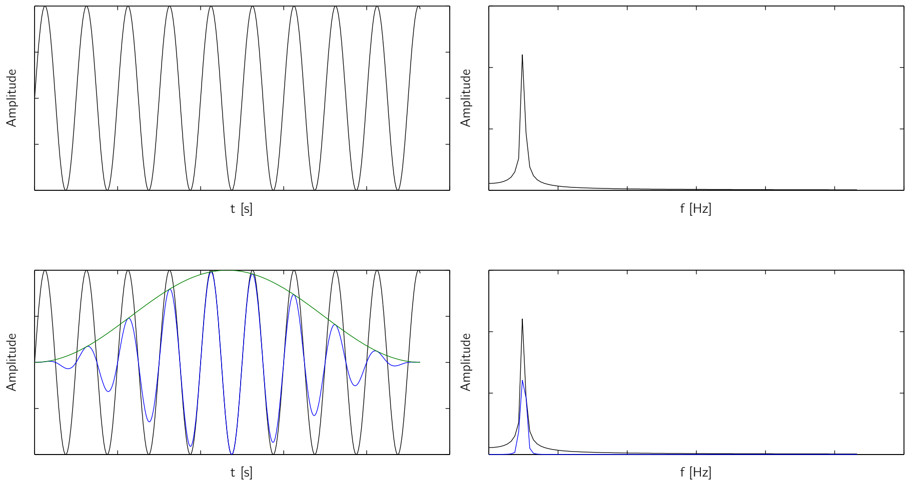
Teorema del campionamento di Shannon

Occorre campionare a frequenza almeno doppio della pi alta frequenza del segnale

$$f_s \geqslant 2 f_{max}$$



Leakage



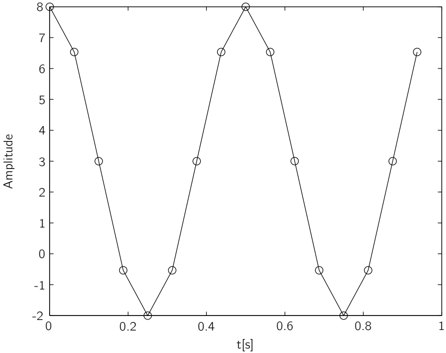
Segnali in Matlab - 1

Trasformata diretta: $X = fft(x);$

Trasformata inversa: $x = ifft(X);$

Creazione di un segnale in Matlab:

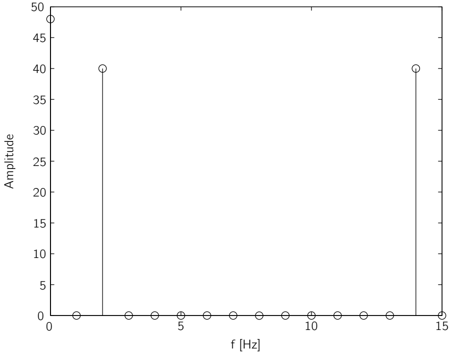
```
T = 1;      % periodo di osservazione
N = 16;     % numero di punti
fs = N/T;   % frequenza di campionamento

xm = 3;      % valore medio
f0 = 2;     % Hz frequenza del segnale
A = 5;      % ampiezza del segnale

t = [0:N-1]./fs; % vettore dei tempi
xt = xm+A*cos(2*pi*f0.*t); % segnale
```

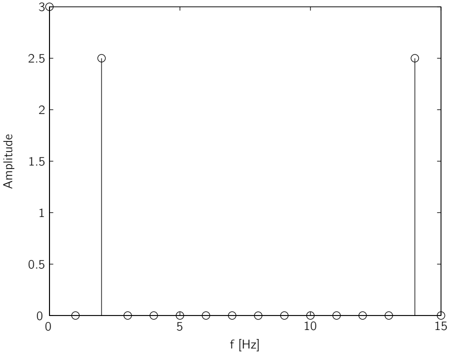


Segnali in Matlab - 2

```
Xk = fft(xt);     %FFT del senale
f = [0:N-1]./T; %vettore delle frequenze
```

```
Xk = 1/N*fft(xt);     %FFT del senale
```

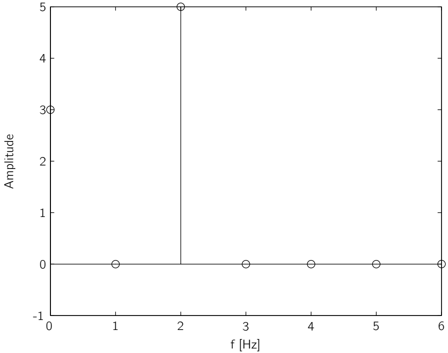


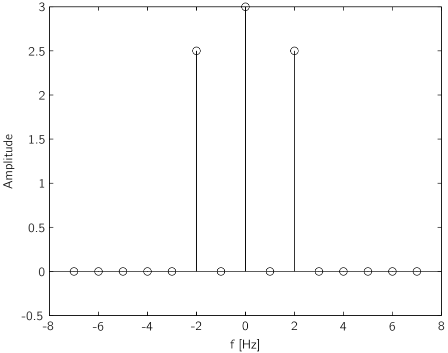


Segnali in Matlab - 3

```
%vettore delle frequenze single side
f = [0:N/2-2]./T;

%FFT single side
Xk = Xk(1:N/2-1).*2./N;
Xk(1) = Xk(1)/2;
```

```
%vettore delle frequenze teorico
f = [-N/2:N/2-1]./T;

%shift della FFT
Xk = Xk/N;
Xk= fftshift(Xk);
```





Autospettro e Densitá Spettrale di Potenza - 1

Di fondamentale importanza é la distribuzione della potenza del segnale con la frequenza. La relazione di Parseval attesta che:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Da questo ultimo integrale si puó notare come la densit spettrale di Potenza (PSD) si pari a:

$$S(f) = \frac{|X(f)|^2}{T}$$

La quantitá $|X(f)|^2 = X(f)X^*(f)$ prende il nome di Autospettro. Nel caso quindi di segnali continui, la Trasformata integrale di Fourier ha dimensioni EUs, e quindi le dimensioni dell'Autospettro sono EU^2s^2, cio:

$$EU^2s^2 = \frac{EU^2s}{Hz} = \frac{Potenza\ Tempo}{Hz} = ESD\ (densit\grave{a}\ spettrale\ di\ energia)$$

Dividendo l'ESD per il tempo T si ottiene la PSD, la cui unit di misura :

$$\frac{EU^2s^2}{s} = EU^2s = \frac{EU^2}{Hz} = densit\grave{a}\ spettrale\ di\ potenza$$

Autospettro e Densitá Spettrale di Potenza - 2

Per determinare la PSD occorrerebbe quindi avere durate di acquisizione dati infinite, ciononostante si pu ricavare una stima della PSD. Si divide il segnale totale in M segmenti, ciascuno di durata T, la stima della PSD quindi data da:

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{|X_m(f)|^2}{T}$$

Considerando quindi la trasformata discreta di Fourier, si ha:

$$\begin{aligned}\hat{S}(k\Delta f) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{|X_m(k\Delta f)|^2}{T} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{N\Delta t} \left| \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \right|^2 \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{\Delta t}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \right|^2\end{aligned}$$

Si pu notare quindi che determinando la PSD per un segnale discreto si ottiene la stessa unit di misura $EU^2 s = EU^2/Hz$.

PSD in Matlab - 1

Si pu utilizzare il comando *fft* di Matlab per determinare lo spettro di una segnale discreto.

$$fft(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \quad [EU]$$

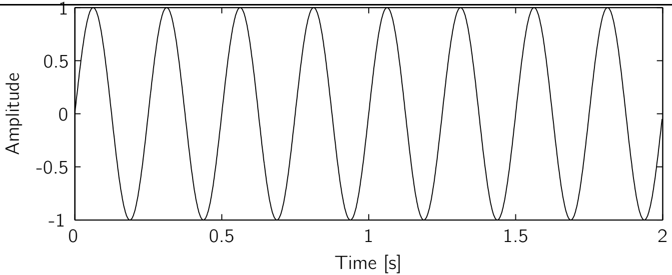
Di conseguenza per poter stimare la PSD bisogna apportare alcune modifiche:

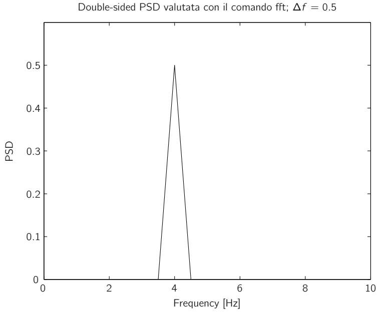
$$X(k) = \frac{1}{N} fft(k)$$

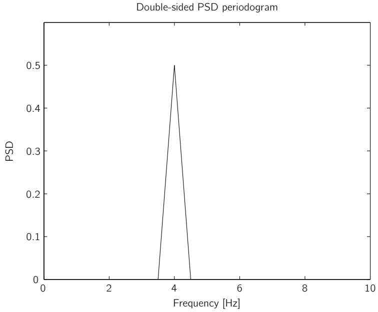
Adesso bisogna moltiplicare $X(k)$ per T in maniera tale da ottenere una quantitá dimensionalmente congruente, ottenendo:

$$\begin{aligned} \hat{S}(k\Delta f) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{N\Delta t} |N\Delta t X_m(k)|^2 \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{\Delta t}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \right|^2 \quad \left[\frac{EU^2}{Hz} \right] \end{aligned}$$

PSD in Matlab - 2







Trasformata di Hilbert

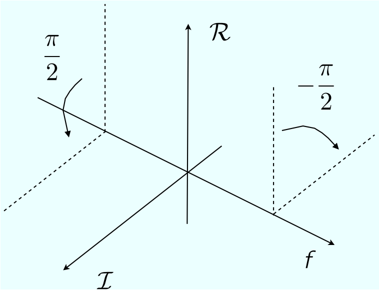
La trasformata di Hilbert:

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\frac{1}{t-\tau}d\tau$$
$$= \frac{1}{\pi}x(t) \otimes \frac{1}{t}$$

In particolare lo Spettro della trasformata di Hilbert pu essere ottenuto moltiplicando le frequenze positive per -j e le frequenze negative per j

$$\mathfrak{F}\{\tilde{x}(t)\} = X(f)\cdot\{-jsign(f)\}$$

$$\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & X(f) \arrow[d, "-jsign(f)"] \\
\tilde{x}(t) \arrow[u, "\mathcal{H}"] & \tilde{X}(f) \arrow[l, "\mathcal{F}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$



Segnale analitico

Si definisce segnale analitico l'espressione:

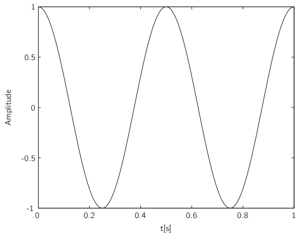
$$x_a(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$$

Il segnale analitico importante nel calcolo dellinviluppo, infatti si ha che:

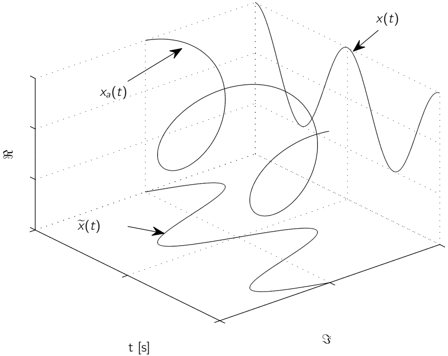
$$env\ x(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)}$$

Segnali in Matlab - Segnale analitico

```
% Dati segnale
T=1; % Durata segnale
N=1024;% Numero di punti
fs=N/T;% Frequenza di campionamento

t=[0:N-1]/fs; % Vettore tempi
freq=2; % Frequenza portante
A=1; % Ampiezza portante

% Creazione del segnale
s=A*cos(2*pi*freq*t);
```




```
%segnale analitico
xa = hilbert(s);
```



Analisi dei segnali non-stazionari

- Short-Time Fourier Transform
- ...

Short-Time Fourier Transform (STFT)

Una soluzione semplice ed intuitiva per introdurre la dipendenza dal tempo nella $\mathcal{F}$ é quella di pre-finestrare il segnale al tempo t, calcolarne la $\mathcal{F}$, e ripeterlo per ogni istante di tempo t.

Il risultato di questa operazione viene chiamato Short-Time Fourier Transform (STFT):

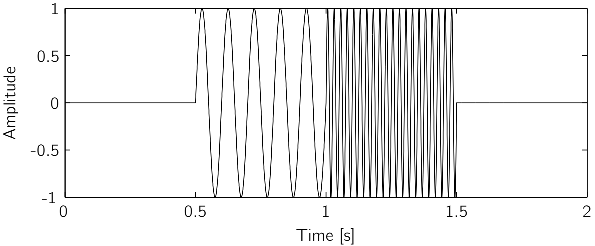
$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)w(t-\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

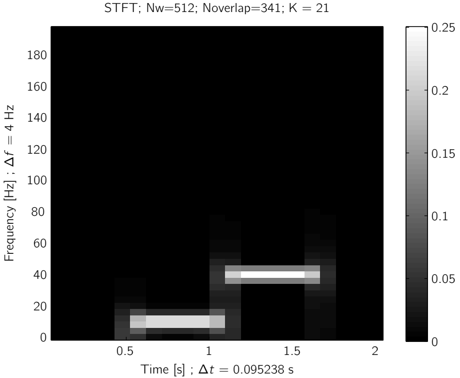
dove w una finestra che trasla sul segnale.

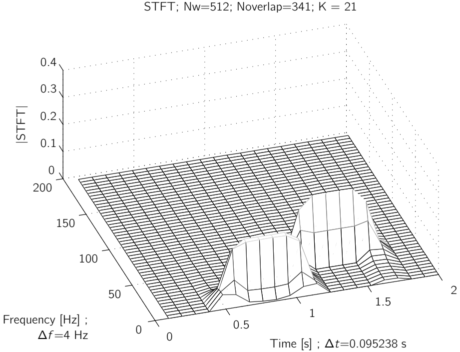
Il grosso problema della STFT che la risoluzione in frequenza ed in tempo non pu essere scelta a piacere, ma rimane fissa per tutto il piano tempo-frequenza ed il prodotto tra la risoluzione in tempo ed in frequenza limitato inferiormente dalla disuguaglianza di Heisemberg

$$\Delta f \Delta t \geqslant \frac{1}{4\pi}$$

Short-Time Fourier Transform (STFT)

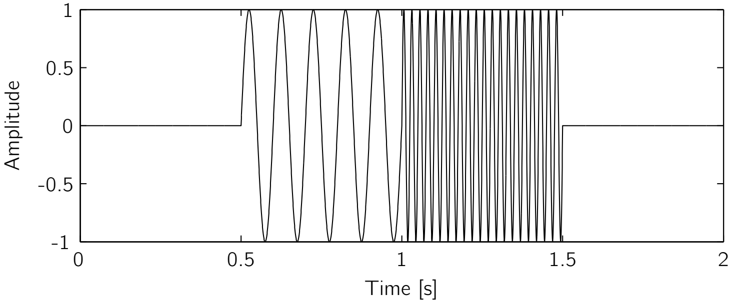






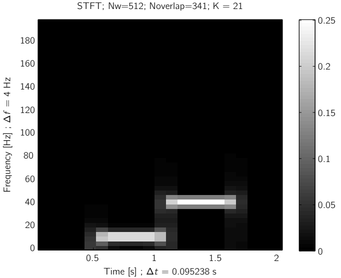
STFT: implementazione in Matlab - 1

```
%% Signal and constants
T = 2;            % signal length
N = 2^12;         % Number of points
fs = N/T;         % sample frequency
f1 = 10;          % frequency of the first sinusoid
f2 = 40;          % frequency of the second sinusoid
Nw = 512;       % window length
Noverlap = fix(2*Nw/3);  % number of overlaping points
t = (1:N)/fs;     %Timev ector used to plot

% Construct a step change in frequency
tn = (1:N/4)/fs;     % Time vector used to create sinusoids
x = [zeros(1,N/4) sin(2*pi*f1*tn) sin(2*pi*f2*tn) zeros(1,N/4)];
```



STFT: implementazione in Matlab - 2

```
%% Computation of the STFT
R = Nw − Noverlap;
K = fix((N − Noverlap)/R);     % Number of averages
Window = hanning(Nw);  % Window function (column vector)

% memory pre−allocation
x_win = zeros(Nw,1);
STFT = zeros(Nw,K);

index = 1:Nw;
for ind = 1:K,
    x_win = x(index)' .∗ Window;
    STFT(:,ind) = 1/Nw .∗ fft(x_win);
    index = index + (Nw − Noverlap);
end;

STFT = STFT(1:Nw/2−1,:);     % Positive frequencies only
f_stft = (0:Nw/2−2)∗fs/Nw;     % Frequency vector
t_stft = (1:K)∗N/fs/K;
```



Oppure con il Signal Processing Toolbox di Matlab:

```
[S,f,t] = spectrogram(x,window,noverlap,nfft,fs)
```