

varianza = (deviazione standard)² = valore quadratico medio - (valor medio)²

Se si usa la notazione $E[x] = m$ si ha

$$E[x^2] = \sigma^2 + m^2$$

Nel caso particolare di distribuzione di probabilità normale, cioè gaussiana, il valor medio e la varianza sono legati alla densità di probabilità dalla

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Sempre per un processo stazionario:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E[x(t-\tau)y(t)] = E[y(t)x(t-\tau)] = R_{yx}(-\tau)$$

ed analogamente

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$$

ma in generale $R_{xy}(\tau)$ e $R_{yx}(\tau)$ non sono uguali e, a differenza dell'autocorrelazione, non sono neppure funzioni pari di τ (fig. 8).

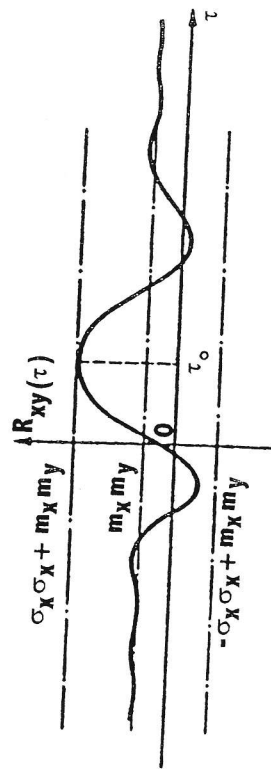


Fig. 8

2.2. Elementi di analisi del segnale nel dominio delle frequenze

2.2.1. La serie di Fourier

Si consideri una funzione periodica di periodo T . Se sono soddisfatte opportune condizioni, una funzione periodica può essere espressa come somma di seni e coseni.

Oltre alla periodicità, per l'esistenza della serie di Fourier devono essere soddisfatte le seguenti condizioni (condizioni di **Dirichlet**):

- ① se la funzione presenta discontinuità il loro numero deve essere finito in ciascun periodo;
- ② la funzione deve contenere un numero finito di massimi e minimi in ciascun periodo;
- ③ la funzione deve essere integrabile in valore assoluto in ogni periodo, cioè:

$$\int_0^T |x(t)| dt < \infty$$

Esistono delle funzioni per le quali non esiste la serie di Fourier; tuttavia nei casi pratici di sistemi reali se la funzione è periodica le condizioni di Dirichlet sono sempre verificate.

La serie di Fourier a coefficienti reali è:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \cos \frac{2\pi i t}{T} + b_i \sin \frac{2\pi i t}{T} \right]$$

$$\text{frequenze} = f_i = \frac{i}{T}$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos \frac{2\pi k t}{T} dt$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin \frac{2\pi k t}{T} dt$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Mediante le formule di Eulero, i seni ed i coseni possono essere espressi come esponenziali complessi.

Si ha quindi la serie di Fourier a coefficienti complessi:

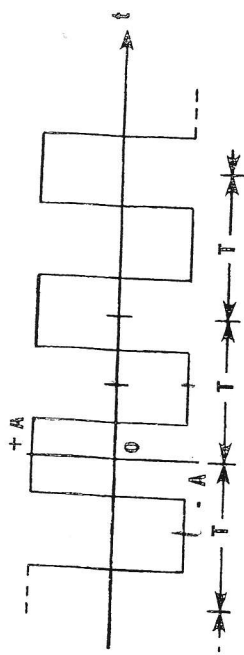


Fig. 9

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

$$x(k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

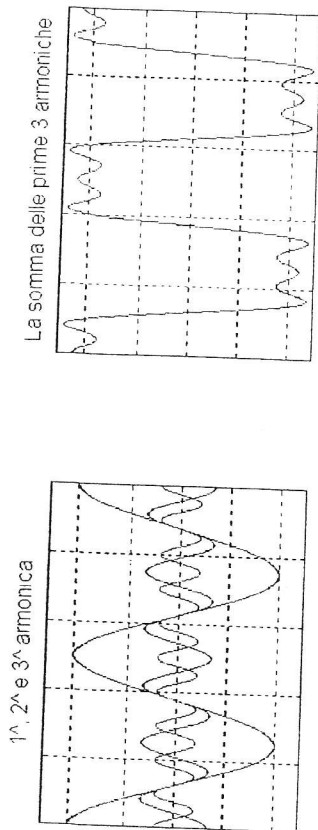
Se ad esempio si considera l'onda quadra della fig. 9, essa soddisfa le condizioni di Dirichlet. Il suo valor medio è nullo, perciò:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0$$

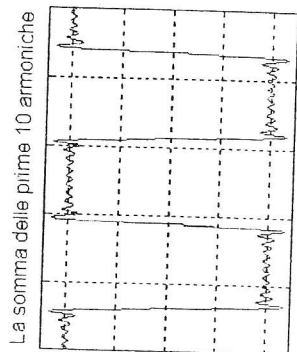
Gli integrali che danno i coefficienti dei termini in seno nel caso in esame sono nulli, perciò la serie contiene solo i coseni:

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_0 t + \dots \right)$$

Se la precedente onda quadra è approssimata con un numero finito di termini nello sviluppo in serie, è ovvio che la ricostruzione dell'onda non è perfetta (fig. 10). All'aumentare del numero di termini considerati



La somma delle prime 3 armoniche



La somma delle prime 25 armoniche

Fig. 10

le oscillazioni intorno alla forma d'onda teorica decadono più rapidamente ed hanno frequenza più elevata; Gibbs ha però dimostrato che la sovralongazione massima è costante e pari all'8,95% della discontinuità originale del segnale. La sovralongazione rimane costante a tale valore e non sparisce neppure considerando infiniti termini (fig. 11). Il fenomeno di Gibbs consiste dunque nel fatto che, quando esistono discontinuità nella forma d'onda originaria, la serie di Fourier fornisce la forma originale in tutti i punti eccettuate le discontinuità. Ad ogni discontinuità vi è sempre una sovralongazione; essa vale l'8,95% dell'ampiezza della discontinuità.

2.2.2. La trasformata di Fourier

Una funzione non periodica $x(t)$ viene trattata come periodica con periodo infinito.

$$TX(k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi kt} dt$$

La frequenza delle armoniche è k/T e la loro spaziatura è $1/T$. Per $T \rightarrow \infty$ la frequenza tende a divenire una funzione continua:

$$f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{k}{T}$$

Definendo:

$$X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} TX(k)$$

si ha:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

detta **trasformata diretta di Fourier** della $x(t)$ od anche spettro della $x(t)$. Essa è anche detta trasformata integrale di Fourier ed esprime il segnale nel dominio delle frequenze a partire da quello nel dominio del tempo.

$X(f)$ esiste se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{condizione di Dirichlet}$$

Per ricavare la trasformata inversa si moltiplichi e divida per T la serie di Fourier a coefficienti complessi:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} TX(k)e^{j2\pi kt} \frac{1}{T}$$

$$df = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{T} - \frac{k}{T} \right) = \frac{1}{T}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad \text{trasformata inversa di Fourier}$$

Essa esprime il segnale nel dominio del tempo, a partire da quello nel dominio delle frequenze.

Ovviamente, se invece della frequenza si considera la pulsazione ω :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

La trasformata di Fourier è una funzione complessa, rappresentabile in forma polare (modulo e fase) o in forma rettangolare complessa (parte reale e parte immaginaria)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \text{Re}(f) + j \text{Im}(f)$$

La fig. 13 riporta ad esempio la trasformata di Fourier di un segnale rettangolare che ha inizio al tempo $t = 0$.

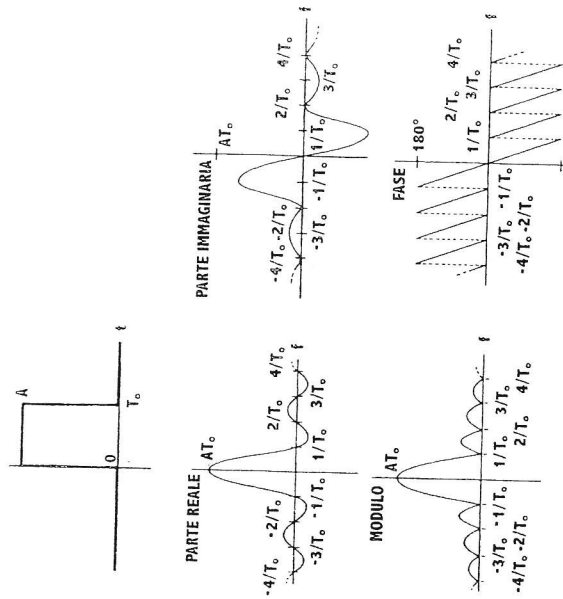


Fig. 13

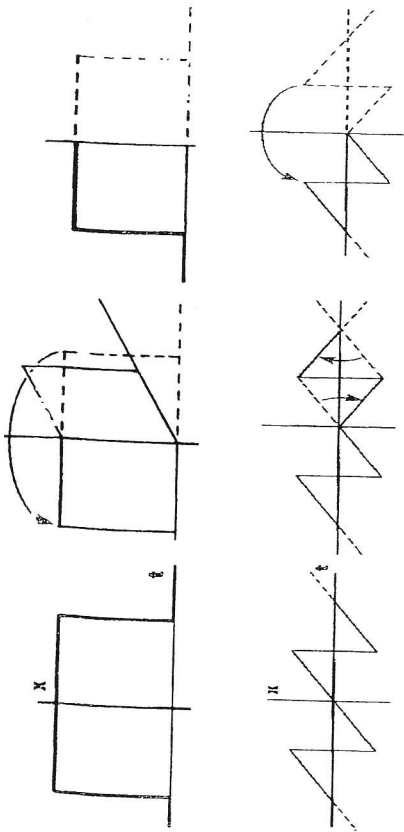


Fig. 14

Per definizione una funzione del tempo è detta:

funzione pari (o simmetrica) se $x(t) = x(-t)$
funzione dispari (o antisimmetrica) se $x(t) = -x(-t)$

In altri termini, la forma d'onda corrispondente ai tempi negativi si ottiene per le funzioni pari mediante un ribaltamento intorno all'asse delle ordinate, per le funzioni dispari con un ribaltamento attorno all'asse delle ascisse (cioè dei tempi), seguito da un ribaltamento attorno all'asse delle ordinate (fig. 14).

Considerando le funzioni nel dominio del tempo come pari o dispari o come somma di parti pari o dispari, si possono predire alcune caratteristiche delle forme d'onda nel dominio delle frequenze. Una qualunque funzione $x(t)$ può essere scomposta in una parte pari $x_p(t)$ ed in una parte dispari $x_d(t)$. Infatti:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_d(t) \\ x(-t) &= x_p(-t) + x_d(-t) = x_p(t) - x_d(t) \\ x_p(t) &= \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \\ x_d(t) &= \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)] \end{aligned}$$

La fig. 15 mostra la trasformata di Fourier di una funzione dispari del tempo. La parte reale (cioè la parte cosinusoidale) è zero, la parte immaginaria (cioè la parte sinusoidale) è diversa da zero ed è una funzione dispari della frequenza; la fase vale sempre $\pm\pi/2$.

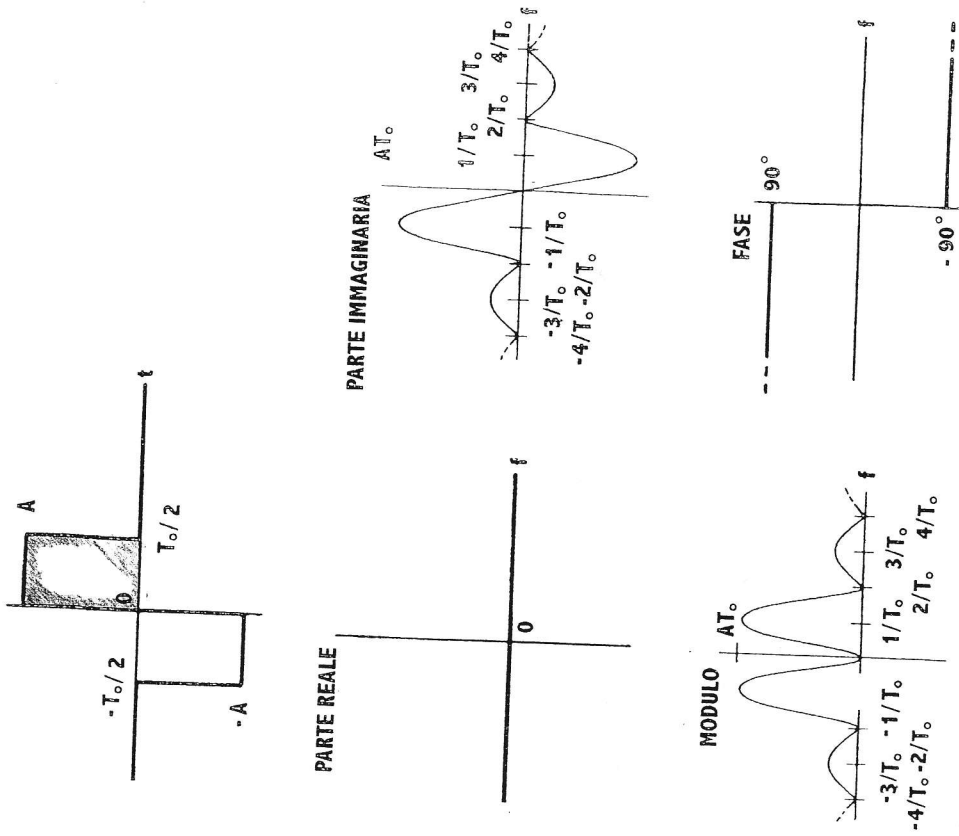


Fig. 15

La fig. 16 mostra la trasformata di Fourier di una funzione pari del tempo. La fase vale sempre $\pm\pi$, la parte immaginaria è quindi sempre nulla, la parte reale è una funzione pari della frequenza.

Funzioni dispari nel dominio del tempo si trasformano in funzioni dispari ed immaginarie nel dominio delle frequenze, funzioni pari nel dominio del tempo si trasformano in funzioni pari e reali nel dominio delle frequenze.

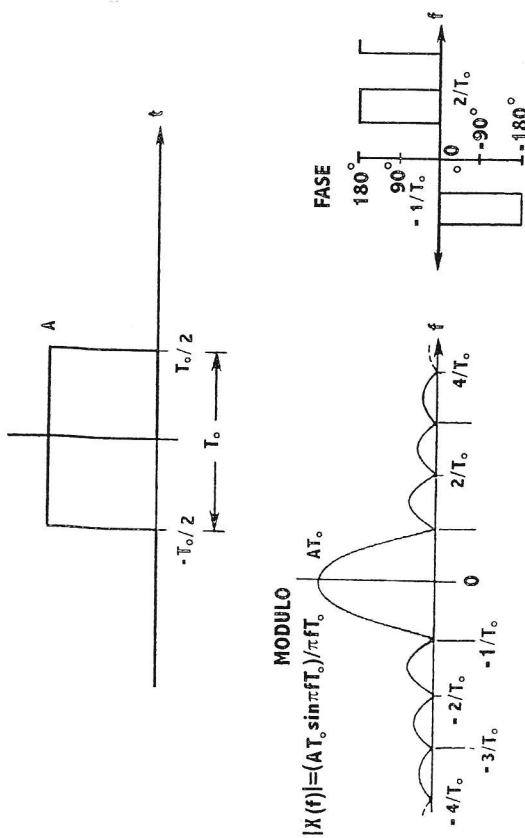


Fig. 16

Se invece di usare la notazione polare si usa quella rettangolare si possono agevolmente trovare le trasformate di funzioni come somme di funzioni pari $x_p(t)$ e dispari $x_d(t)$ del tempo, come indicato nella fig. 17.

Procedendo analiticamente, se $x(t) = x_p(t) + x_d(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x_p(t) + x_d(t)] [\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft] dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) \cos 2\pi ft dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \cos 2\pi ft dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) \sin 2\pi ft dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \sin 2\pi ft dt$$

e ricordando che:

- l'integrale di una funzione dispari (cioè antisimmetrica) è zero
- il prodotto di due funzioni pari (cioè simmetriche) o di due funzioni dispari (cioè antisimmetriche) è pari (cioè simmetrico)
- il prodotto di una funzione dispari (cioè antisimmetrica) e di una funzione pari (cioè simmetrica) è dispari (cioè antisimmetrica)
- il seno è una funzione dispari (cioè antisimmetrica)
- il coseno è una funzione pari (cioè, simmetrica)

il secondo e il terzo integrale si annullano e quindi:

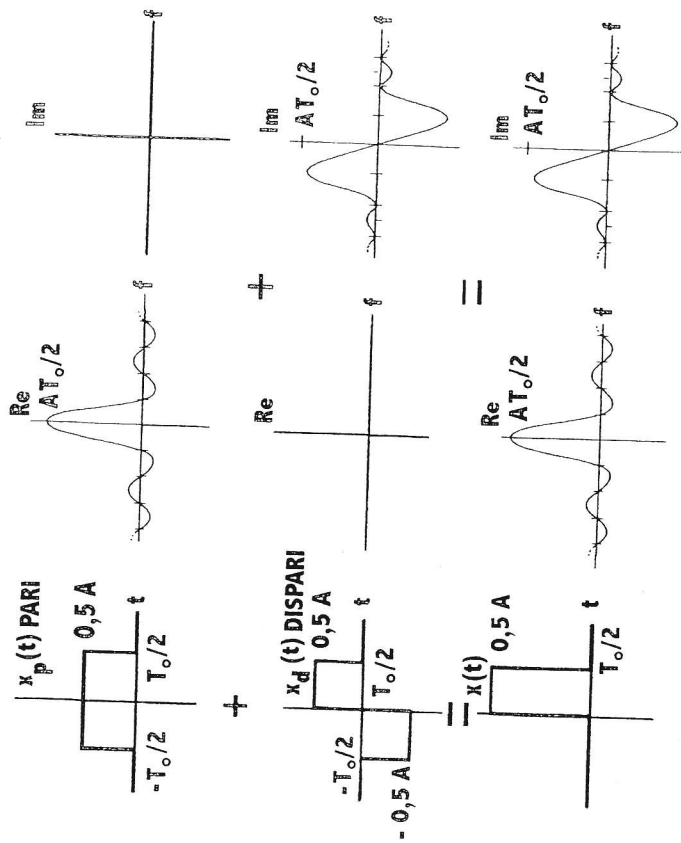


Fig. 17

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) \cos 2\pi f t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \sin 2\pi f t dt$$

Se poi $x(t)$ è pari allora $x_d = 0$, $x_p(t) = x(t)$ e quindi la trasformata di Fourier di una funzione pari è

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) \cos 2\pi f t dt$$

Ad es. la funzione di autocorrelazione è una funzione pari. Si vogliono ora determinare le trasformate del seno e del coseno.

L'impulso di Dirac $\delta(t-t_0)$ [tale notazione indica il valore della funzione al tempo t quando l'impulso è applicato al tempo t_0] è un impulso di ampiezza tendente a infinito, durata tendente a zero, area unitaria. Quando utilizzato all'interno di un integrale esso assume il ruolo di un operatore che valuta la funzione integranda per uno specifico valore della variabile. Infatti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

Analogamente accade nel dominio delle frequenze; se la funzione è l'esponenziale si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} \delta(f - f_0) df = e^{j2\pi f_0 t}$$

ma il primo membro è anche la trasformata inversa di Fourier di $\delta(f - f_0)$ e quindi:

$$\delta^{-1} \delta(f - f_0) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t$$

Analogamente:

$$\delta^{-1} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] = e^{-j2\pi f_0 t} = \cos 2\pi f_0 t - j \sin 2\pi f_0 t$$

La trasformata inversa della somma è perciò:

$$\delta^{-1} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t + \cos 2\pi f_0 t - j \sin 2\pi f_0 t = 2 \cos 2\pi f_0 t$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} e^{j2\pi f t} df = \cos 2\pi f_0 t$$

e perciò la trasformata di Fourier di $\cos 2\pi f_0 t$ è la somma delle due funzioni delta $\delta(f - f_0)$ e $\delta(f + f_0)$ ciascuna moltiplicata per $\frac{1}{2}$:

$$\delta \cos 2\pi f_0 t = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

Si noti che si tratta di una funzione reale (conformemente al fatto che il coseno è una funzione pari). Essa è riportata nella fig. 18. Procedendo in modo analogo si ricava:

$$\delta \sin 2\pi f_0 t = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}$$

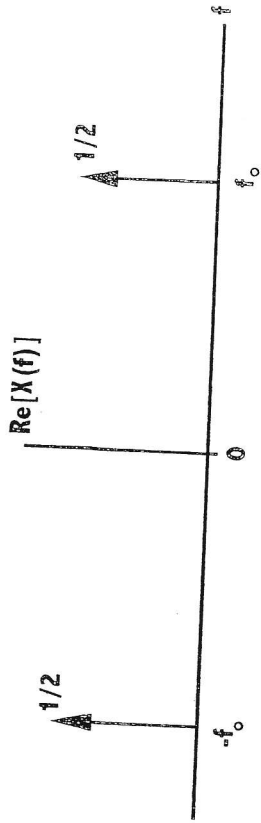


Fig. 18

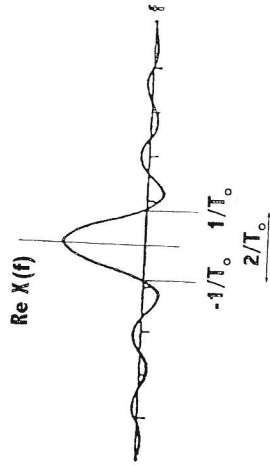
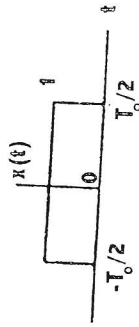


Fig. 19

Si noti che si tratta di una funzione puramente immaginaria (conformemente al fatto che il seno è una funzione dispari).

Si voglia calcolare la **trasformata della funzione rettangolare** (o uniforme o boxcar function), talora indicata con $\text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$; essa è (fig. 19):

$$u(t) = 1 \quad \text{per } -\frac{T_0}{2} \leq t < \frac{T_0}{2}$$

$$u(t) = 0 \quad \text{altrove}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(t)] &= \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)\right] = U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} u(t)e^{-j2\pi ft} \frac{1}{T_0} dt = \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{1}{-j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f T_0/2} - e^{+j2\pi f T_0/2} \right) = \\ &= \frac{-2j \sin 2\pi f T_0/2}{-j2\pi f} = \frac{\sin \pi f T_0}{\pi f} \end{aligned}$$

od anche, chiamando $\text{sinc}(f T_0) = \frac{\sin \pi f T_0}{\pi f T_0}$ (un'espressione del tipo

$$\frac{\sin x}{x} \text{ è detta } \mathbf{sinc} \text{ kernel})$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = T_0 \text{sinc}(f T_0)$$

Il suo massimo si ha per $f = 0$ e può essere trovato con la regola di L'Hospital:

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\sin \pi f T_0}{\pi f} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{df}(\sin \pi f T_0)}{\frac{d}{df}(\pi f)} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\pi T_0 \cos \pi f T_0}{\pi} = T_0$$

La funzione si annulla la prima volta per

$$\pi f T_0 = \pm \pi$$

cioè per

$$f = \pm \frac{1}{T_0}$$

La larghezza del lobo centrale è dunque $2/T_0$; ciò mostra che l'intervallo nel dominio delle frequenze è inversamente proporzionale alla durata del dominio nel tempo.

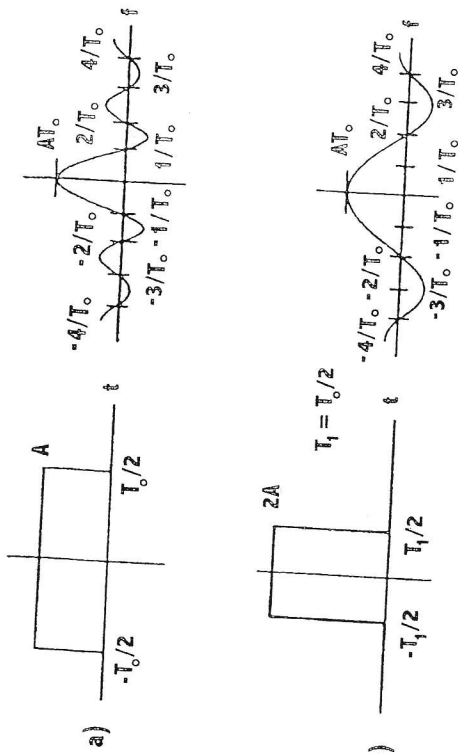


Fig. 20

Più in generale si può considerare la fig. 20.

La fig. 20a mostra che un'espansione dei tempi comporta un'alterazione sia in ampiezza sia in frequenza nel dominio delle frequenze, con crescita delle ampiezze e contrazione delle frequenze.

L'opposto accade per una contrazione dei tempi.

La fig. 20b mostra che un'espansione delle frequenze comporta un'alterazione sia in ampiezza sia in durata del dominio del tempo, con crescita delle ampiezze e contrazione della durata temporale.

L'opposto accade per una contrazione delle frequenze.

Si voglia ora calcolare la **trasformata di una convoluzione**. Si indichi con * il simbolo della convoluzione:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du$$

$$X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)Y(f-u)du$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t) * y(t)] &= X(f)Y(f) \\ \mathcal{F}[x(t) \cdot y(t)] &= X(f) * Y(f) \end{aligned}$$

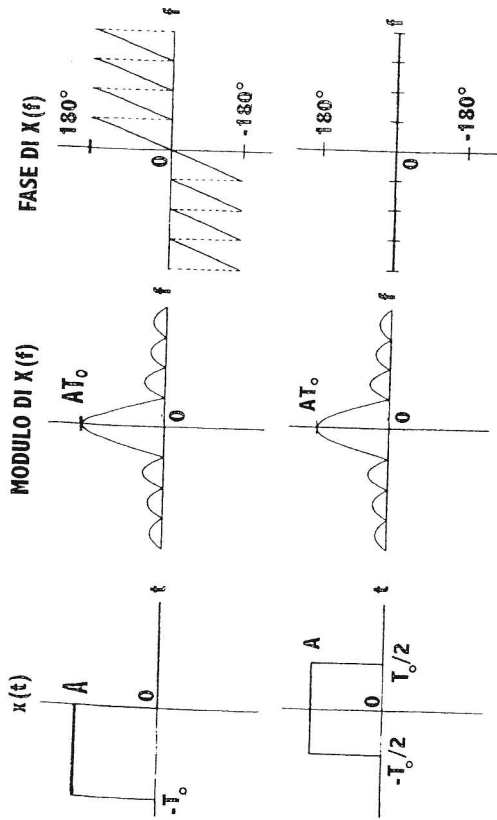


Fig. 21

cioè la trasformata della convoluzione è il prodotto delle trasformate e la trasformata del prodotto è la convoluzione delle trasformate. La prima relazione sarà utile ad esempio per ricavare la risposta di un sistema lineare a partire dalla risposta all'impulso, la seconda ad esempio quando si applicherà una qualche forma di finestatura ad un segnale temporale.

Se si effettua una traslazione temporale di un segnale (fig. 21), essa ovviamente incide solo sulla fase e non sull'ampiezza e sull'andamento in funzione della frequenza della trasformata.

La traslazione temporale della funzione permette di trarre vantaggio dalla simmetria della stessa.

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

Ponendo $\tau = t - t_0$ si ha:

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f(t_0 + \tau)} d\tau = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

cioè un ritardo nel dominio del tempo corrisponde a moltiplicare per un esponenziale complesso nel dominio delle frequenze, cioè, come si è detto, ad una variazione della fase.

Se invece si effettua una traslazione nel dominio delle frequenze, introduce una nuova variabile $z = f - f_0$ si ha

$$dz = df$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\delta(X(f - f_0))] &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(z) e^{j2\pi z t} e^{j2\pi f_0 t} dz = \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} X(z) e^{j2\pi z t} dz = e^{j2\pi f_0 t} x(t) \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X[f - (-f_0)]\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f + f_0)\} = e^{j2\pi f_0 t} x(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(f - f_0) + X(f + f_0)] = (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) x(t) = \frac{\cos 2\pi f_0 t}{2} x(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}\right] = \cos 2\pi f_0 t x(t)$$

È questo il caso di una modulazione di ampiezza.

Se allo spettro $X(f)$ di una funzione rettangolare applichiamo una traslazione positiva ed una negativa nel dominio delle frequenze e sommiamo, questo produce una modulazione del segnale costante della funzione rettangolare con frequenza pari alla traslazione f_0 applicata (fig. 22).

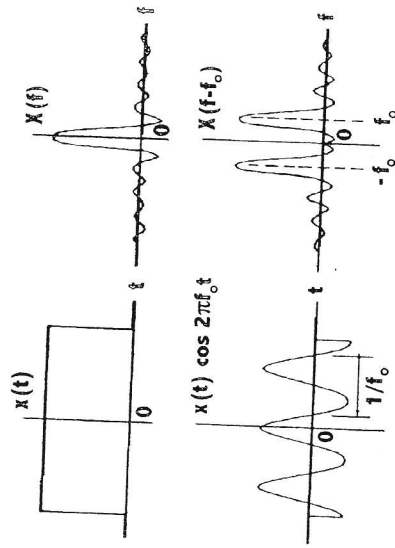


Fig. 22

Analogamente si può osservare quanto segue. Se una funzione $x(t)$ viene rilevata solo per un intervallo di tempo finito T_0 , questo equivale ad applicarle una funzione rettangolare $u(t)$ cioè a considerare il prodotto:

$$x_f(t) = x(t) u(t).$$

Al prodotto delle funzioni nel dominio del tempo corrisponde la convoluzione delle trasformate nel dominio delle frequenze:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_f(t)] &= X_f(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta) U(f - \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta) \frac{\sin \pi(f - \eta) T_0}{\pi(f - \eta)} d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - \eta) \frac{\sin \pi \eta T_0}{\pi \eta} d\eta \end{aligned}$$

dove è sfruttata la proprietà commutativa delle convoluzioni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

Se in particolare la $x(t)$ è una cosinusoide di ampiezza unitaria e frequenza f_0 si ha:

$$X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

e quindi la trasformata di Fourier di una funzione coseno acquisita per un tempo finito T_0 è:

$$\mathcal{F}[x_f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \frac{\sin \pi(f - \eta) T_0}{\pi(f - \eta)} d\eta =$$

poiché come si è visto la funzione delta all'interno di un integrale di convoluzione agisce come un operatore che valuta l'altra funzione per il valore associato della variabile:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{\sin \pi(f - f_0) T_0}{\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2} \frac{\sin \pi(f + f_0) T_0}{\pi(f + f_0)} = \\ &= \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi(f - f_0) T_0}{\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi(f + f_0) T_0}{\pi(f + f_0)} \end{aligned}$$

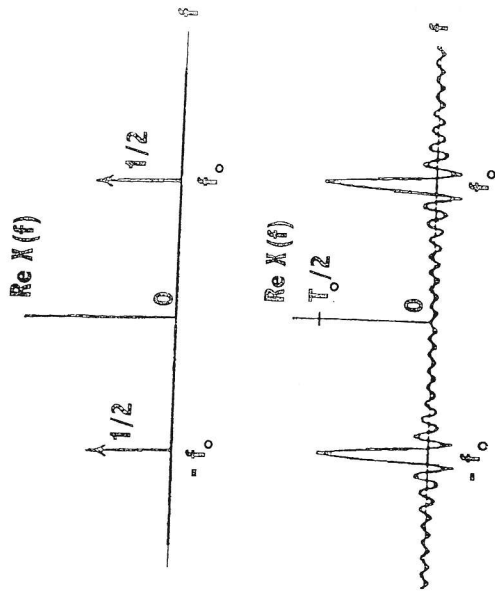


Fig. 23

Le funzioni $T_0 \frac{\sin x}{x}$ sono centrate attorno a $\pm f_0$ ed il lobo principale ha ampiezza T_0 e larghezza $2/T_0$. Se T_0 è abbastanza grande, la larghezza di tale lobo e dei lobi adiacenti significativi è sufficientemente piccola perché si possa trascurare l'effetto della sovrapposizione delle due funzioni $\frac{\sin x}{x}$ in corrispondenza dei massimi dei lobi centrali. Poiché nel nostro caso nell'espressione della trasformata vi era anche il fattore $\frac{1}{2}$, si potrà ritenere che l'ampiezza dei massimi della trasformata valga $T_0/2$ (fig. 23).

Tale figura rappresenta dunque la trasformata di una cosinusoide di ampiezza unitaria e frequenza f_0 , troncata con una acquisizione dal tempo $-T_0/2$ al tempo $T_0/2$.

Quanto sopra esposto è ulteriormente illustrato nella fig. 24, che si riferisce a una cosinusoide di ampiezza A acquisita attraverso una finestra di osservazione rettangolare da $-T_0/2$ a $+T_0/2$.

È interessante ancora notare che se la trasformata della funzione rettangolare $u(t)$ viene divisa per due e scritta come somma delle due metà:

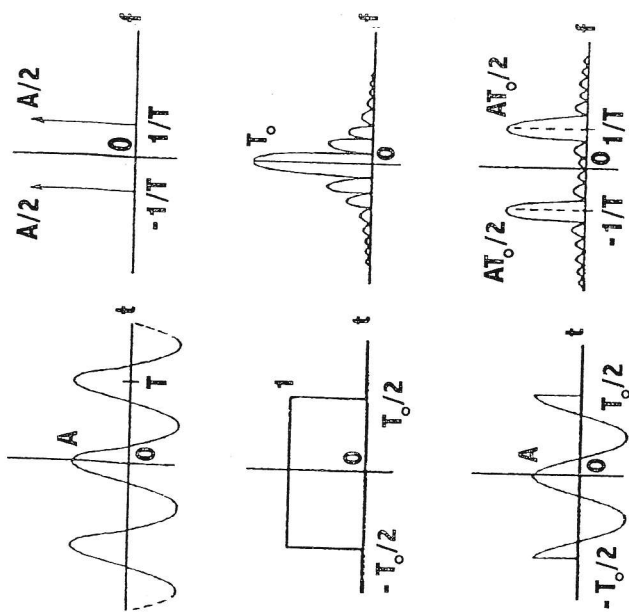


Fig. 24

$$\mathcal{F}[x_f(t)] = \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi f T_0}{\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi f T_0}{\pi(f + f_0)}$$

si vede che la moltiplicazione del segnale della funzione rettangolare per una cosenoide ha prodotto la traslazione rispettivamente di $\pm f_0$ della curva a lobi della funzione rettangolare. A tali traslazioni nel dominio delle frequenze corrisponde, come si è detto, una modulazione nel dominio del tempo ed infatti $x_f(t) = u(t) x(t)$ è l'espressione della funzione rettangolare modulata in ampiezza dalla cosenoide.

È molto importante osservare un altro fenomeno: l'applicazione di una finestra temporale al segnale, cioè il troncamento temporale di una acquisizione, ha prodotto il fenomeno del **leakage**.

Con riferimento alla precedente fig. 24, relativa ad una finestra rettangolare, la trasformata di Fourier della cosenoide (costituita da due impulsi) non coincide esattamente con la trasformata di Fourier della cosenoide troncata, che si è allargata su lobi per effetto della convoluzione con

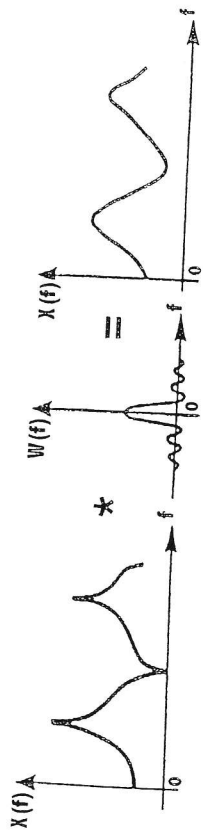


Fig. 25

la finestra temporale. La potenza in un intervallo di frequenze si è sparsa (*leakage = dispersione, perdita*) nelle regioni di frequenza adiacenti, con alterazioni quindi di ampiezze e frequenze. L'entità del leakage dipende dalla forma della funzione della finestra temporale, detta anche funzione di pesatura $w(t)$ (*weighting function*), della quale si fa la convoluzione con il segnale (fig. 25).

Le tabb. 4 e 5 raccolgono alcune utili trasformate di Fourier. È interessante notare che curve a campana nel dominio del tempo danno luogo a curve a campana nel dominio delle frequenze.

Si noti che l'integrale di Fourier di una funzione di campionamento fornisce a sua volta una funzione di campionamento, cioè, un altro andamento a pettine.

Per quanto riguarda i simboli si ricorda che si indica:
 $f_s = 1/\Delta t$ la frequenza di campionamento

$\text{comb}_{\Delta t}$ l'infinita serie di impulsi $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$

$\text{rep}_f[x(f)]$ la ripetizione di $x(f)$ ogni f_s unità come definito dalla convoluzione $x(f) * \text{comb}_{f_s}$

2.2.3. La trasformata discreta di Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform)

Se i segnali, ancorché analogici in origine, sono acquisiti e processati in forma digitale, si presentano sotto forma di sequenze finite di valori numerici derivanti dal campionamento e dalla digitalizzazione effettuati dal convertitore analogico-digitale. Si opera su queste sequenze finite di dati mediante DFT e FFT. La Fast Fourier Transform (FFT) è semplicemente un efficiente schema di calcolo per la valutazione della DFT. Entrambe operano su sequenze di valori discreti equispaziati, in un intervallo finito.