

Fig. 70

Nel caso del cepstrum di potenza di aveva

$$x_p(t) = \mathcal{F}^{-1} [|\ln|A(\omega)|^2] = \mathcal{F}^{-1} [2\ln|A(\omega)|]$$

analogo all'espressione del cepstrum complesso con fase zero. Tornando all'esempio della wavelet più l'eco

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) + as(t - t_0) \\ X(\omega) &= S(\omega) + aS(\omega)e^{-j\omega t_0} = S(\omega)[1 + ae^{-j\omega t_0}] \\ \ln(1 + ae^{-j\omega t_0}) &= ae^{-j\omega t_0} - \frac{a^2}{2} e^{-2j\omega t_0} + \frac{a^3}{3} e^{-3j\omega t_0} - \dots \\ \hat{x}(t) &= \mathcal{F}^{-1} [\ln X(\omega)] = \mathcal{F}^{-1} [\ln S(\omega) + \ln(1 + ae^{-j\omega t_0})] = \end{aligned}$$

ricordando lo sviluppo in serie di  $\ln(1 + x)$  precedentemente riportato

$$= \hat{s}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} \delta(t - nt_0)$$

*cioè l'eco si manifesta sotto forma di una serie di picchi. Si può ricostruire la wavelet senza eco se si rimuove mediante liftering tale serie di picchi e poi si effettuano le operazioni inverse (cepstrum inverso) (fig. 71).*

La difficoltà può risiedere nella difficoltà di individuazione dei picchi dovuti all'eco se il cepstrum  $\hat{s}$  della sola wavelet non ha un andamento abbastanza avviato. Inoltre l'eventuale presenza di rumore nel segnale  $x(t)$  può rendere difficile distinguere i picchi dovuti all'eco.

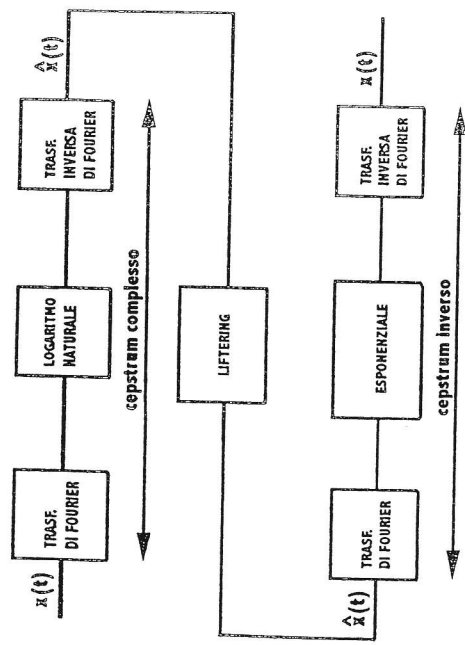


Fig. 71

Nel calcolo del cepstrum complesso occorre ricordare la difficoltà nel calcolo della fase dovuta al fatto che assume valori multipli, cioè non è unica. Non si può assumere il "valore principale", cioè quello nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ , la fase deve essere una funzione continua e non può cioè fare salti di  $2\pi$ ; questo si ottiene calcolando la fase come integrale della derivata della fase.

## 2.4. I segnali modulati

### 2.4.1. Modulazione di ampiezza, di frequenza, di fase

Segnali modulati in ampiezza si producono spontaneamente nei sistemi meccanici ad es. nel caso di ruote dentate (ingranaggi ordinari o planetari), cuscinetti a rotolamento, ecc. per effetto di eccentricità, difetti superficiali e altre cause, di strutture a razze (rigidezza radiale non uniforme circolarmente ma variabile periodicamente), di contatti localizzati tramite rulli o sfere o mediante ruote dentate agli estremi dei bracci portatore di treni planetari, della spaziatura fra i bulloni di fissaggio, ecc.

Segnali modulati in frequenza possono nascere negli ingranaggi per variazioni della velocità di rotazione in conseguenza di deformazioni normali dei denti, di loro difetti eventuali, di variazioni della coppia trasmessa.

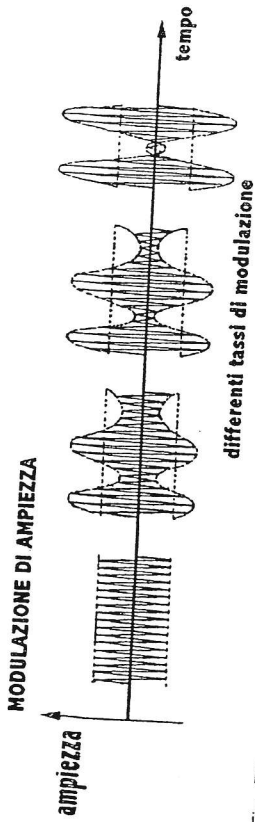


Fig. 72

In generale un segnale modulato può corrispondere a una modulazione in ampiezza, in frequenza, in fase. Si esamineranno qui di seguito preliminarmente questi fenomeni nella forma più semplice, per poi riprendere alcuni aspetti con maggiore generalità.

Nella forma più semplice un'onda modulata è descritta dalla

$$s(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

dove l'ampiezza  $A$ , la pulsazione  $\omega_1$  e la fase  $\varphi$  possono essere variate nel tempo. Se si fa variare solo l'ampiezza  $A$  dell'onda originale (o **portante**) si parla di *modulazione in ampiezza*; se si fa variare solo la pulsazione  $\omega_1$  della portante si parla di *modulazione in frequenza*; se si fa variare solo la fase  $\varphi$  della portante si parla di *modulazione di fase*.

Nel caso più semplice di **modulazione di ampiezza**, l'ampiezza della portante è modulata con legge sinusoidale:

$$s(t) = A_0(1 + \gamma \sin \omega_2 t) \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

dove  $\gamma$  = fattore di modulazione (o tasso di modulazione).  
È noto dalla trigonometria che

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

Pertanto per  $\alpha = \omega_1 t + \varphi$  e  $\beta = \omega_2 t$

$$s(t) = A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{\gamma A_0}{2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi] - \frac{\gamma A_0}{2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi]$$

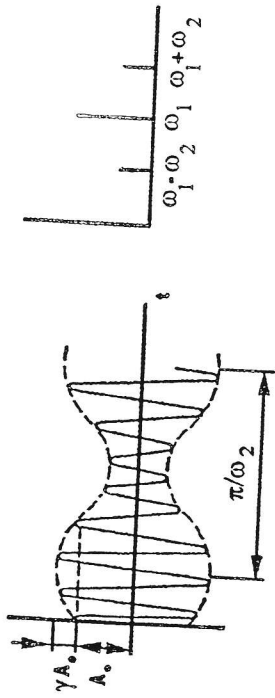


Fig. 73

Lo spettro di un segnale sinusoidale modulato in ampiezza è dunque composto da 3 pulsazioni: quella della portante  $\omega_1$  e quelle delle 2 bande laterali  $\omega_1 - \omega_2$  (banda laterale inferiore) e  $\omega_1 + \omega_2$  (banda laterale superiore) (fig. 73).

Analogamente nel caso di legge cosinusoidale

$$s(t) = A_0(1 + \gamma \cos \omega_2 t) \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

ricordando che

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$$

si ha

$$s(t) = A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{\gamma A_0}{2} \sin[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi] + \frac{\gamma A_0}{2} \sin[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi]$$

Analogamente nel caso in cui

$$s(t) = A_0(1 + \gamma \cos \omega_2 t) \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

ricordando che

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

si ha

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) + \frac{\gamma A_0}{2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi] + \frac{\gamma A_0}{2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi]$$

Analogamente nel caso in cui

$$s(t) = A_0(1 + \gamma \sin \omega_2 t) \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

ricordando che

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

si ha

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) - \frac{\gamma A_0}{2} \sin[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi] + \frac{\gamma A_0}{2} \sin[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi]$$

In ogni caso le ampiezze delle bande laterali dipendono dal tasso di modulazione ma non dalla pulsazione di modulazione. L'ampiezza di banda delle oscillazioni modulate in ampiezza è

$$(\omega_1 + \omega_2) - (\omega_1 - \omega_2) = 2\omega_2$$

Nel caso di modulazione di frequenza e di modulazione di fase si ha

$$s(t) = A \sin \alpha(t)$$

Nel caso di **modulazione di frequenza**

$$\omega = \frac{d \alpha(t)}{dt}$$

$$\alpha(t) = \int \omega dt = \int [\omega_1 + (\Delta \omega) f(t)] dt = \omega_1 t + \Delta \omega \int f(t) dt$$

avendo chiamato  $\Delta \omega$  la massima variazione della pulsazione della portante  $\omega$ , e  $f(t)$  la legge di variazione della pulsazione; se quest'ultima si realizza secondo legge armonica  $f(t) = \cos \omega_2 t$ , chiamando  $\gamma = \frac{\Delta \omega}{\omega_2}$  l'indice di modulazione si ha:

## MODULAZIONE DI FREQUENZA

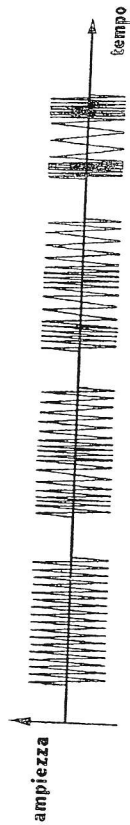


Fig. 74  
differenti tassi di modulazione

$$\alpha(t) = \omega_1 t + \frac{\Delta \omega}{\omega_2} \int \cos \omega_2 t dt = \omega_1 t + \gamma \sin \omega_2 t$$

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t + \gamma \sin \omega_2 t)$$

$$\frac{s(t)}{A} = \sin(\omega_1 t + \gamma \sin \omega_2 t) = \sin \omega_1 t \cos(\gamma \sin \omega_2 t) + \cos \omega_1 t \sin(\gamma \sin \omega_2 t)$$

Le grandezze  $\cos(\gamma \sin \omega_2 t)$  e  $\sin(\gamma \sin \omega_2 t)$  possono essere espresse mediante le funzioni di Bessel di prima specie di ordine  $k$  dell'argomento  $\gamma$ , che si indicano con  $J_k(\gamma)$

$$\cos(\gamma \sin \omega_2 t) = J_0(\gamma) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\gamma) \cos 2n \omega_2 t$$

$$\sin(\gamma \sin \omega_2 t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(\gamma) \sin(2n+1) \omega_2 t$$

$$\frac{s(t)}{A} = \sin \omega_1 t J_0(\gamma) + \sin \omega_1 t \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\gamma) \cos 2n \omega_2 t + \cos \omega_1 t \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(\gamma) \sin(2n+1) \omega_2 t$$

ed essendo

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\sin \omega_1 t \cos 2n \omega_2 t = \frac{1}{2} \sin(\omega_1 - 2n \omega_2) t + \frac{1}{2} \sin(\omega_1 + 2n \omega_2) t$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos \omega_1 t \sin(2n+1)\omega_2 t = \frac{1}{2} \sin[\omega_1 + (2n+1)\omega_2]t - \frac{1}{2} \sin[\omega_1 - (2n+1)\omega_2]t$$

$$\frac{s(t)}{A} = J_0(\gamma) \sin \omega_1 t + \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\gamma) \sin(\omega_1 - 2n\omega_2)t + \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\gamma) \sin(\omega_1 + 2n\omega_2)t +$$

$$+ \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(\gamma) \sin \omega_1 t + (2n+1)\omega_2 t - \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(\gamma) \sin[\omega_1 - (2n+1)\omega_2]t =$$

$$J_0(\gamma) \sin \omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(\gamma) \sin(\omega_1 - k\omega_2)t + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\gamma) \sin(\omega_1 + k\omega_2)t$$

$$s(t) = A \left[ J_0(\gamma) \sin \omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(\gamma) \sin(\omega_1 - k\omega_2)t + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\gamma) \sin(\omega_1 + k\omega_2)t \right]$$

o, se si vuole, in forma più compatta

$$s(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma) \sin(\omega_1 + n\omega_2)t$$

Si vede dunque che lo spettro del segnale sinusoidale modulato in frequenza contiene i componenti alle pulsazioni:

$$\dots \omega_1 - k\omega_2 \dots \omega_1 - 2\omega_2 \quad \omega_1 - \omega_2 \quad \omega_1 \quad \omega_1 + \omega_2 \quad \omega_1 + 2\omega_2 \dots \omega_1 + k\omega_2 \dots$$

aventi per ampiezze rispettivamente

$$\dots J_k(\gamma) \dots J_2(\gamma) \quad J_1(\gamma) \quad J_0(\gamma) \quad J_1(\gamma) \quad J_2(\gamma) \dots J_k(\gamma) \dots$$

Il numero di componenti attorno a  $\omega_1$  è infinito, le loro ampiezze sono distribuite simmetricamente attorno a quello centrale di ampiezza  $J_0(\gamma)$ . In

realtà, anche se l'ampiezza di banda è infinita, i valori  $J_k(\gamma)$  decrescono rapidamente al crescere di  $k$ . Per  $k \geq \gamma$  tutti i  $J_k(\gamma)$  sono minori di 0,01 e quindi l'ampiezza di banda sarà praticamente

$$(\omega_1 + k\omega_2) - (\omega_1 - k\omega_2) = 2k\omega_2 \cong 2\gamma\omega_2 = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_2} \omega_2 = 2\Delta\omega$$

L'ampiezza di banda in pratica dunque dipende dalla profondità di modulazione  $\Delta\omega$  ed è indipendente da  $\omega_2$ . Le bande laterali dipendono sia dai  $\Delta\omega$  sia da  $\omega_2$ .

Generalmente in meccanica l'indice di modulazione massimo è prossimo a 1.

Per  $\gamma$  molto inferiore all'unità si hanno solo i componenti con pulsazioni  $\omega_1, \omega_1 - \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ .

Nel caso di **modulazione di fase**.

$$\alpha(t) = \omega_1 t + \varphi(t)$$

Se  $\varphi(t)$  varia con legge armonica si ha

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos \omega_2 t$$

$$s(t) = A \sin \alpha(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_m \cos \omega_2 t)$$

Si può dimostrare, in analogia al caso precedente, che le bande laterali dipendono da  $\varphi_m$  e che l'ampiezza di banda è  $2k\varphi_2 \cong 2\varphi_m \omega_2$  e dipende quindi sia da  $\varphi_m$  sia da  $\omega_2$ .

Riprendiamo ora alcuni concetti fin qui espressi ampliandoli ad un caso più generale.

Si consideri la **modulazione d'ampiezza**. Il segnale modulato potrà essere scritto

$$s(t) = A(t) f(t)$$

essendo  $A(t)$  il segnale di modulazione e  $f(t)$  il segnale di base. Assumendo che entrambi siano periodici, essi possono essere espressi sotto forma di serie di Fourier

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + \dots + \alpha_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) + \dots$$

$$A(t) = \beta_0 + \beta_1 \cos(\omega_2 t + \psi_1) + \beta_2 \cos(2\omega_2 t + \psi_2) + \dots + \beta_m \cos(m\omega_2 t + \psi_m) + \dots$$

Assumendo  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ , cioè che il segnale di modulazione e il segnale di base abbiano valor medio nullo, si ha:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n \beta_m \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \cos(m\omega_2 t + \psi_m)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

di cui

$$\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} = \frac{\cos p + \cos q}{2}$$

$$\frac{p+q}{2} = n\omega_1 t + \varphi_n$$

$$\frac{p-q}{2} = m\omega_2 t + \psi_m$$

e quindi, rispettivamente sommando e sottraendo membro a membro

$$p = (n\omega_1 + m\omega_2)t + \varphi_n + \psi_m$$

$$q = (n\omega_1 - m\omega_2)t + \varphi_n - \psi_m$$

Perciò

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_m}{2} \{ \cos[(n\omega_1 + m\omega_2)t + \varphi_n + \psi_m] + \cos[(n\omega_1 - m\omega_2)t + \varphi_n - \psi_m] \}$$

**Il segnale modulato contiene dunque le pulsazioni  $n\omega_1 \pm m\omega_2$ .**

Le ampiezze delle componenti alle pulsazioni  $n\omega_1 + m\omega_2$  e  $n\omega_1 - m\omega_2$  valgono  $\frac{\alpha_n \beta_m}{2}$ .

**Il segnale modulato  $s(t)$  è periodico se il rapporto  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  è il rapporto di due numeri interi.**

Infatti, chiamando  $T$  il periodo di  $s(t)$ , esaminando la già citata equazione  $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n \beta_m \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \cos(m\omega_2 t + \psi_m)$ , il segnale  $s(t)$  si ripete dopo un tempo  $T$  se i componenti aventi pulsazioni  $n\omega_1$  e  $m\omega_2$ , che hanno periodi  $\frac{2\pi}{n\omega_1}$  e  $\frac{2\pi}{m\omega_2}$ , sono tali che  $p$  volte il periodo del primo è uguale a  $q$  volte il periodo del secondo, con  $p$  e  $q$  numeri interi.

$$p \frac{2\pi}{n\omega_1} = q \frac{2\pi}{m\omega_2}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{mp}{nq} = \text{rapporto fra numeri interi}$$

Il periodo vale:

$$T = q \frac{2\pi}{n\omega_2}$$

Nel caso particolare in cui sia il segnale di modulazione sia il segnale di base si riducano a due cosinusoidi soltanto, il segnale modulato  $s(t)$ , essendo

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0$$

$$\alpha_1 \neq 0 \quad \beta_1 \neq 0$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \beta_2 = \beta_3 = \dots = 0$$

è dato da

$$s(t) = \alpha_1 \beta_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \psi_1)$$

$$s(t) = \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \{ \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \psi_1] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \psi_1] \}$$

Si può ricavare anche un'altra espressione del segnale  $s(t)$ . Chiamando  $\omega_s$  la somma di  $\omega_1$  e  $\omega_2$  si ha:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_s$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_1 - (\omega_s - \omega_1) = 2\omega_1 - \omega_s$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \{ \cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) + \cos[2(\omega_1 - \omega_s)t + \varphi_1 - \psi_1] \} = \\ &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \{ \cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) + \cos[-(\omega_s t - 2\omega_1 t - \varphi_1 - \psi_1)] \} = \\ &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \{ \cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) + \cos(\omega_s t - 2\omega_1 t - \varphi_1 + \psi_1) \} = \\ &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \{ \cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) + \cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1 - 2\varphi_1 - 2\omega_1 t) \} = \\ &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \{ \cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) + \cos[(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) - 2(\omega_1 t + \varphi_1)] \} \end{aligned}$$

Poiché  $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$   
si ha

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \{ \cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) + \cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) \cos[\omega_1 t + \varphi_1] + \\ &+ \sin(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) \sin[2(\omega_1 t + \varphi_1)] \} = \\ &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \{ \cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) [1 + \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_1)] + \\ &+ \sin(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) \sin[2(\omega_1 t + \varphi_1)] \} \end{aligned}$$

cioè  $s(t)$  è composta da 2 componenti, uno in  $\cos(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1)$  ed uno in  $\sin(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1)$ , aventi per ampiezza rispettivamente

$$\frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \{ 1 + \cos[2(\omega_1 t + \varphi_1)] \} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \sin[(\omega_1 t + \varphi_1)]$$

Perciò, componendo il seno con il coseno:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{\left\{ \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} [1 + \cos(2(\omega_1 t + 2\varphi_1))] \right\}^2 + \left\{ \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \sin[2(\omega_1 t + \varphi_1)] \right\}^2} \cdot \\ &\cdot \cos[(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) - \varphi] \\ &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \sqrt{\{ 1 + \cos[2(\omega_1 t + \varphi_1)] \}^2 + \sin^2[2(\omega_1 t + \varphi_1)]} \cdot \cos[(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) - \varphi] \\ &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \sqrt{1 + 2 \cos[2(\omega_1 t + \varphi_1)] + \cos^2[2(\omega_1 t - \varphi_1)] + \sin^2[2(\omega_1 t - \varphi_1)]} \cdot \\ &\cdot \cos[(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) - \varphi] \\ &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \sqrt{1 + 2 \cos[2(\omega_1 t + \varphi_1)] + 1 \cdot \cos[(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) - \varphi]} = \\ &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \sqrt{2 + 2 \cos[2(\omega_1 t + \varphi_1)]} \cdot \cos[(\omega_s t + \varphi_1 + \psi_1) - \varphi] \end{aligned}$$

dove

$$\tan \varphi = \frac{\sin[2(\omega_1 t + \varphi_1)]}{1 + \cos[2(\omega_1 t + \varphi_1)]}$$

Ovviamente è possibile la consueta rappresentazione in termini di fasori, cioè di vettori rotanti (fig. 75) [ricordando che  $\sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ ].

## 2.4.2. I battimenti

Un altro fenomeno, che deriva questa volta dalla *somma* (anziché dal prodotto) di due segnali periodici, è quello dei **battimenti**. Il battimento è una *variazione periodica dell'ampiezza di un'oscillazione risultante dalla combinazione di due oscillazioni di frequenza leggermente diversa; la frequenza del battimento è uguale alla differenza delle frequenze delle oscillazioni.*