$$s^2(t) = \left[(A_k + A_i)^2\cos^2\left(\frac{\omega_d}{2}t + \frac{\varphi_d}{2}\right) + (A_k - A_i)^2 sin^2\left(\frac{\omega_d}{2}t + \frac{\varphi_d}{2}\right)\right]\cdot\cos^2\left(\frac{\omega_s t}{2} + \frac{\varphi_s}{2} - \psi\right)$$

$$sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$s^2(t) = \left[(A_k + A_i)^2\frac{1 + \cos(\omega_d t + \varphi_d)}{2} + (A_k - A_i)^2\frac{1 - \cos(\omega_d t + \varphi_d)}{2}\right]\cdot$$
$$\cdot\frac{1 + \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi)}{2} =$$
$$= \left[\frac{(A_k + A_i)^2}{2} + \frac{(A_k + A_i)^2}{2}\cos(\omega_d t + \varphi_d) + \frac{(A_k - A_i)^2}{2} - \frac{(A_k - A_i)^2}{2}\right.\cdot$$
$$\left.\cdot\cos(\omega_d t + \varphi_d)\right]\frac{1 + \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi)}{2} =$$
$$= \left[\frac{A_k^2 + A_i^2 + 2A_kA_i + A_k^2 + A_i^2 - 2A_kA_i}{2} + \frac{A_k^2 + A_i^2 + 2A_kA_i - A_k^2 - A_i^2 + 2A_kA_i}{2}\right.$$
$$\left.\cdot\cos(\omega_d t + \varphi_d)\right]\frac{1 + \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi)}{2} =$$
$$= [(A_k^2 + A_i^2) + 2A_kA_i\cos(\omega_d t + \varphi_d)]\frac{1 + \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi)}{2} =$$
$$= \frac{A_k^2 + A_i^2}{2} + A_kA_i\cos(\omega_d t + \varphi_d) + \frac{A_k^2 + A_i^2}{2}\cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi) +$$
$$+ A_kA_i\cos(\omega_d t + \varphi_d)\cos(\omega_d t + \varphi_d - 2\psi)$$

$$\omega_s = (k + i)\omega_D \qquad \omega_d = (k - i)\omega_D$$

$$s^2(t) = \frac{A_k^2 + A_i^2}{2} + A_kA_i\cos[(k - i)\omega_D t + \varphi_d] + \frac{A_k^2 + A_i^2}{2}\cdot$$
$$\cdot\cos[(k + i)\omega_D t + \varphi_s - 2\psi] + A_kA_i\cos[(k - i)\omega_D t + \varphi_d]\cos[(k + i)\omega_D t +$$
$$+ \varphi_s - 2\psi]$$

$k = i + 1$

$$s^2(t) = \frac{A_k^2 + A_i^2}{2} + A_kA_i\cos[\omega_D t + \varphi_d] + \frac{A_k^2 + A_i^2}{2}\cdot$$
$$\cdot\cos[(2i + 1)\omega_D t + \varphi_s - 2\psi] + A_kA_i\cos(\omega_D t + \varphi_d]\cos[(2i + 1)\omega_D t +$$
$$+ \varphi_s - 2\psi]$$

La pulsazione del segnale modulante, che fornisce la pulsazione ω_D del difetto, può essere determinata con una trasformazione di Fourier applicata all'*inviluppo* del segnale portante.

L'inviluppo di un segnale può essere ottenuto per via analogica mediante raddrizzamento del segnale (elevazione al quadrato) e filtraggio passa-basso del segnale raddrizzato. Frequentemente l'inviluppo è ottenuto per altro via, cioè mediante trasformata di Hilbert.

2.4.3. La trasformata di Hilbert e l'inviluppo di un segnale

Si definisce **trasformata di Hilbert** $\tilde{x}(t) = \mathcal{H}\,[x(t)]$ di una funzione temporale $x(t)$ l'espressione

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{H}\,[x(t)] = \frac{1}{\pi}x(t)*\frac{1}{t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t - \tau}d\tau$$

dove * indica convoluzione.

La **trasformata inversa di Hilbert** è

$$x(t) = \mathcal{H}^{-1}[\tilde{x}(t)] = -\frac{1}{\pi}\tilde{x}(t)*\frac{1}{t} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{x}(\tau)}{t - \tau}d\tau$$

Le trasformate di Hilbert godono di alcune importanti proprietà, verificabili per sostituzione.

Indicando con $X(f)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$

$\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = -jX(f)$	$f > 0$
$\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = 0$	$f = 0$
$\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = +jX(f)$	$f < 0$

ossia $\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = -jX(f)\mathrm{sgn}(f)$

Infatti

$$\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}x(t)*\frac{1}{t}\right] = \mathcal{F}\left[x(t)*\frac{1}{\pi t}\right]$$
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j\mathrm{sgn}(f)$$

Ricordando che la trasformata di Fourier di una convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier, si ha:

$$\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = X(f)[-j\mathrm{sgn}(f)] = -jX(f)\mathrm{sgn}(f)$$

La $x(t)$ e la sua trasformata di Hilbert sono ortogonali nell'intervallo $(-\infty, \infty)$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\tilde{x}(t)dt = 0$.
Inoltre se si effettua due volte la trasformazione di Hilbert, sotto condizioni piuttosto generali si ha:

$$\tilde{\tilde{x}}(t) = -x(t)$$

La trasformata di Hilbert è un utile mezzo per ricavare l'inviluppo di una forma d'onda. Infatti si può dimostrare che l'inviluppo è dato da

$$env\ x(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)}$$

Se si definisce **segnale analitico $x_a(t)$** l'espressione

$$x_a(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$$

l'inviluppo è il modulo del segnale analitico

$$|x(t) + j\tilde{x}(t)| = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} = env\ x(t)$$

Per verificare che la precedente definizione di inviluppo soddisfi il nostro concetto intuitivo di inviluppo esaminiamo il caso semplice in cui

$$x(t) = A(t)\cos\omega_0 t$$
$$\tilde{x}(t) = \mathcal{H}[A(t)\cos\omega_0 t] = A(t)sin\omega_0 t$$

Infatti

$$\mathcal{F}[A(t)\cos\omega_0 t] = \mathcal{F}[A(t)\cos 2\pi f_0 t] = \frac{1}{2}[A(f+f_0) + A(f-f_0)]$$

$$\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = -j\ sgn(f)\frac{1}{2}[A(f+f_0) + A(f-f_0)] =$$

$$= -\frac{j^2}{j}\frac{1}{2}[A(f+f_0) + A(f-f_0)]sgn(f) = \frac{1}{2j}[A(f+f_0) + A(f-f_0)]sgn(f)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[\tilde{x}(t)]\} = \tilde{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{sgn(f)\frac{1}{2j}[A(f+f_0) + A(f-f_0)]\right\} =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2j}[A(f+f_0) - A(f-f_0)]\right\} = A(t)sin2\pi f_0 t = A(t)sin\omega_0 t$$

$$env\ x(t) = |x_a(t)| = |x(t) + j\tilde{x}(t)| = |A(t)\cos\omega_0 t + jA(t)sin\omega_0 t| =$$

$$= \sqrt{A^2(t)\cos^2\omega_0 t + A^2(t)sin^2\omega_0 t} = \sqrt{A^2(t)(\cos^2\omega_0 t + sin^2\omega_0 t)} = A(t)$$

che è proprio ciò che si intende con inviluppo.
La **proprietà che lega le trasformate di Hilbert alle trasformate di Fourier** facilita le procedure di calcolo. Se la si applica al segnale analitico si ha:

$$\mathcal{F}[x_a(t)] = X_a(f) = \mathcal{F}[x(t) + j\tilde{x}(t)] = X(f) + j[-jX(f)\mathrm{sgn}(f)] = X(f)[1 + \mathrm{sgn}(f)]$$

$$\begin{aligned} X_a(f) &= 2X(f) && f > 0 \\ &= X(f) && f = 0 \\ &= 0 && f < 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{x}(t) = \mathrm{Im}\{\mathcal{F}^{-1}[X_a(f)]\}$$

Tali relazioni permettono un immediato calcolo della trasformata di Hilbert e dell'inviluppo.

3. Le caratteristiche dello stato di salute delle macchine, il monitoraggio delle macchine ed i criteri di giudizio della vibrazione

3.1. *Le caratteristiche dello stato di salute delle macchine*

La **temperatura** è prevalentemente un indicatore della condizione di funzionamento della macchina, cioè del carico sotto cui essa sta lavorando; tuttavia essa in molti casi può essere anche un indicatore dello stato di salute della stessa.

Infatti la temperatura di parete di un carter di un riduttore a ingranaggi può segnalare difetti di lubrificazione (mancanza o tipo inadeguato di olio) o, in condizioni estreme, il suo stato meccanico, la temperatura della carcassa di una pompa può segnalare cavitazione o danneggiamento degli anelli di usura, la temperatura di un cuscinetto a rotolamento può indicare difetti di lubrificazione o, in condizioni estreme, il suo stato meccanico.