

Fig. 24

$$\mathcal{F}[x_w(t)] = \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi f T_0}{\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi f T_0}{\pi(f + f_0)}$$

si vede che la moltiplicazione del segnale della funzione rettangolare per una cosinusoidale ha prodotto la traslazione rispettivamente di $\pm f_0$ della curva a lobi della funzione rettangolare. A tali traslazioni nel dominio delle frequenze corrisponde, come si è detto, una modulazione nel dominio del tempo ed infatti $x_w(t) = u(t)x(t)$ è l'espressione della funzione rettangolare modulata in ampiezza dalla cosinusoidale.

È molto importante osservare un altro fenomeno: l'applicazione di una finestra temporale al segnale, cioè il troncamento temporale di una acquisizione, ha prodotto il fenomeno del **leakage**.

Con riferimento alla precedente fig. 24, relativa ad una finestra rettangolare, la trasformata di Fourier della cosinusoidale (costituita da due impulsi) non coincide esattamente con la trasformata di Fourier della cosinusoidale troncata, che si è allargata su lobi per effetto della convoluzione con

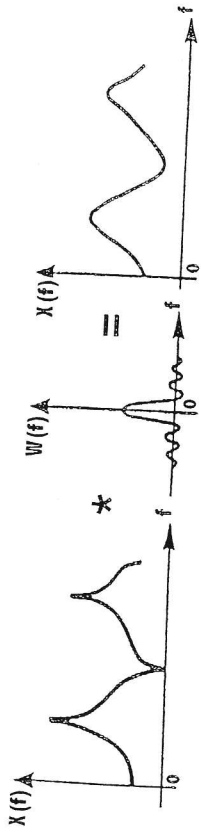


Fig. 25

la finestra temporale. La potenza in un intervallo di frequenze si è sparsa (*leakage = dispersione, perdita*) nelle regioni di frequenza adiacenti, con alterazioni quindi di ampiezze e frequenze. L'entità del leakage dipende dalla forma della funzione della finestra temporale, detta anche funzione di pesatura $w(t)$ (weighting function), della quale si fa la convoluzione con il segnale (fig. 25).

Le tabb. 4 e 5 raccolgono alcune utili trasformate di Fourier. È interessante notare che curve a campana nel dominio del tempo danno luogo a curve a campana nel dominio delle frequenze.

Si noti che l'integrale di Fourier di una funzione di campionamento fornisce a sua volta una funzione di campionamento, cioè, un altro andamento a pettine.

Per quanto riguarda i simboli si ricorda che si indica:
 $f_s = 1/\Delta t$ la frequenza di campionamento

comb $_{\Delta t}$ l'infinita serie di impulsi $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$

rep $_{f_s} [x(f)]$ la ripetizione di $x(f)$ ogni f_s unità come definito dalla convoluzione $x(f) * \text{comb}_{f_s}$

2.2.3. La trasformata discreta di Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform)

Se i segnali, ancorché analogici in origine, sono acquisiti e processati in forma digitale, si presentano sotto forma di sequenze finite di valori numerici derivanti dal campionamento e dalla digitalizzazione effettuati dal convertitore analogico-digitale. Si opera su queste sequenze finite di dati mediante DFT e FFT. La Fast Fourier Transform (FFT) è semplicemente un efficiente schema di calcolo per la valutazione della DFT. Entrambe operano su sequenze di valori discreti equispaziati, in un intervallo finito.

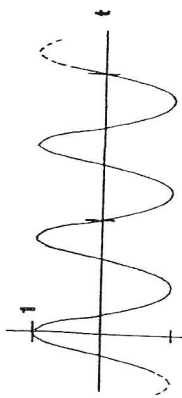
Tab. 4 - Relazioni funzionali

Funzione	Trasformata di Fourier
$x(t)$	$X(f)$
$\delta^{-1}[X(f)]$	$\delta^{-1}[X(f)]$
$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$
$y(t)$	$Y(f)$
$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t)^* y(t)$	$X(f) Y(f)$
$\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) Y(t - \tau) d\tau$	$X(f) Y(f)$
$x(t) y(t)$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) Y(f - \tau) d\tau$
$x(t - t_0)$	$X(f) e^{-j2\pi f t_0}$
$x(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$x(f - f_0)$
$(d/dt)x(t)$	$j2\pi f X(f)$
$-j2\pi t x(t)$	$(d/df)X(f)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau$	$X(f) / (j2\pi f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(f)$ purché $X(0) = 0$
$x(t) / (-j2\pi f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$
$Qsinc(f/Q)$	$rect(f/Q)$
$rect(t/Q)$	$Qsinc(f/Q)$
$comb_{\Delta t} x(t)$	$f_s comb_b$
$rep_{\Delta t} x(t)$	$f_s rep_s[X(f)]$
$rep_{\Delta t} x(t)$	$(1/T) comb_{1/T} rep_s[X(f)]$
$X^*(t)$	$X^*(-f)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$	(relazione di Parseval)

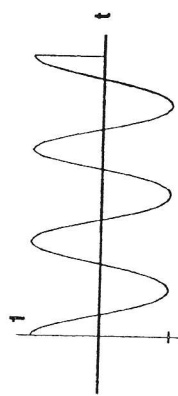
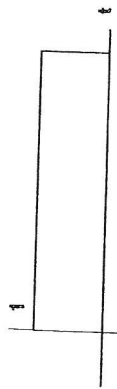
Tab. 5 - Trasformate di Fourier di specifiche funzioni

$x(t)$	$X(f)$
$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\cos(2\pi f_0 t) x(t)$	$\frac{1}{2j} [X(f + f_0) + X(f - f_0)]$
$x(t) = \begin{cases} 1 - T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$	$\frac{\sin \pi f T_0}{\pi f}$
$rect(t/T_0)$	$T_0 sinc(\pi f T_0)$
$T_0 sinc(t/T_0)$	$rect(f/T_0)$
$x(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\frac{1}{2} \delta(t) - 1/(j2\pi t)$	$u(f)$
$\delta(t)$	$X(f) = 1$ per ogni f
$x(t) = 1$ per ogni t	$\delta(f)$
$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$\exp\left(\frac{-t^2}{2a^2}\right)$	$\sqrt{2\pi a^2} \exp\left(\frac{-j(2\pi f a)^2}{2}\right)$
$\frac{2 \sin 2\pi Bt}{2\pi t}$	$x(f) = \begin{cases} 1 - B \leq f \leq B \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

La DFT è periodica con periodo N , essendo N il numero di punti, cioè di valori acquisiti. Il suo calcolo comporta N^2 moltiplicazioni di numeri complessi. Se si adotta un numero di campioni pari ad una potenza di 2, cioè $N=2^k$, si può utilizzare un algoritmo (FFT) che comporta solo $N \log_2 N$ moltiplicazioni. Ad es. per $N = 1024$ (cioè $k=10$), le moltiplicazioni sono 1024·10 anziché 1024·1024, cioè il tempo è circa 1/100 di quello necessario per una DFT. All'aumentare del numero N di campioni (128,



FINESTRA RETTANGOLARE



CAMPIONAMENTO

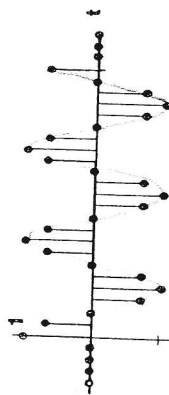
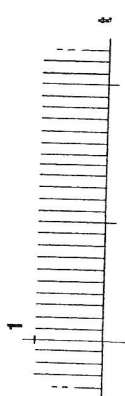


Fig. 26

512, 1024, 2048) a parità di frequenza di campionamento aumenta la risoluzione in frequenza.

Le operazioni di finestrazione e di campionamento dei segnali possono essere visti come prodotti di funzioni temporali (fig. 26).

La DFT è calcolata da una funzione temporale usando N campioni presi ai tempi $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N - 1) \Delta t$, dove Δt è l'intervallo di campionamento.

Per la serie di Fourier si aveva:

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

essendo $x(t)$ una funzione periodica di periodo T .

La DFT opera solo su una piccola parte del segnale temporale e la tratta come parte di un segnale periodico.

$$t \rightarrow n\Delta t \quad dt \rightarrow \Delta t \quad x(t) = x(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt \rightarrow \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k \frac{n\Delta t}{N\Delta t}} \Delta t$$

Restringendo k ad essere uno degli interi $0, 1, 2, \dots, (N-1)$ si ha la **trasformata discreta di Fourier**:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

I valori corrispondenti di frequenza sono

$$f = \frac{k}{T}$$

Analogamente:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad t \rightarrow n\Delta t \quad ; \quad T \rightarrow N\Delta t$$

e la **trasformata discreta inversa di Fourier** è:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

Altri autori definiscono la DFT e l'inversa ricavandole, anziché, dalla serie di Fourier, a partire dall'integrale di Fourier (cioè come campionamento di una funzione continua), considerando però il segnale periodico con periodo pari alla finestra di osservazione, sostituendo quindi ad f_i valori discreti $f_k = k/N \Delta t$, sostituendo ad x_i valori discreti $x(n)$, sostituendo agli integrali le sommatorie e considerando solo gli N termini da 0 ad $N-1$. Secondo tale definizione di ha:

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$x(n\Delta t) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$$

Tali definizioni differiscono da quelle precedenti solo per un fattore di scala dato dal coefficiente che è davanti alle sommatorie (e per le unità di misura).

Si noti che la dimensione della *trasformata integrale di Fourier* è quella del segnale moltiplicata per il tempo; è quindi una densità di distribuzione, espressa in unità ingegneristiche moltiplicate per un tempo, cioè divise per la frequenza: EU/Hz (avendo indicato con EU le Engineering Units). Invece le dimensioni della *serie di Fourier* sono quelle del segnale $x(t)$, cioè le unità di misura sono EU. Le dimensioni della *trasformata discreta di Fourier* dipendono da come essa è stata definita: se la definizione è quella usuale ricavata dalla serie di Fourier le unità di misura sono EU, se la definizione è quella ricavata dalla trasformata continua di Fourier le unità di misura sono EU/Hz.

La fig. 27 mostra la derivazione della DFT dalla trasformata integrale di Fourier: al campionamento e alla finestratura nel dominio del tempo corrispondono due successive operazioni di convoluzione nel dominio delle frequenze, al campionamento nel dominio delle frequenze corrisponde una convoluzione nel dominio del tempo che dà luogo alla periodicità del segnale temporale campionato.

I coefficienti della DFT sono tali che:

$$X(N-k) = X^*(k)$$

dove * indica complesso coniugato.

Infatti:

$$\begin{aligned} X(N-k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi(N-k)\frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n} e^{j2\pi k \frac{n}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(\cos 2\pi n - j \sin 2\pi n) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j2\pi k \frac{n}{N}} = \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \right]^* = X^*(k) \end{aligned}$$

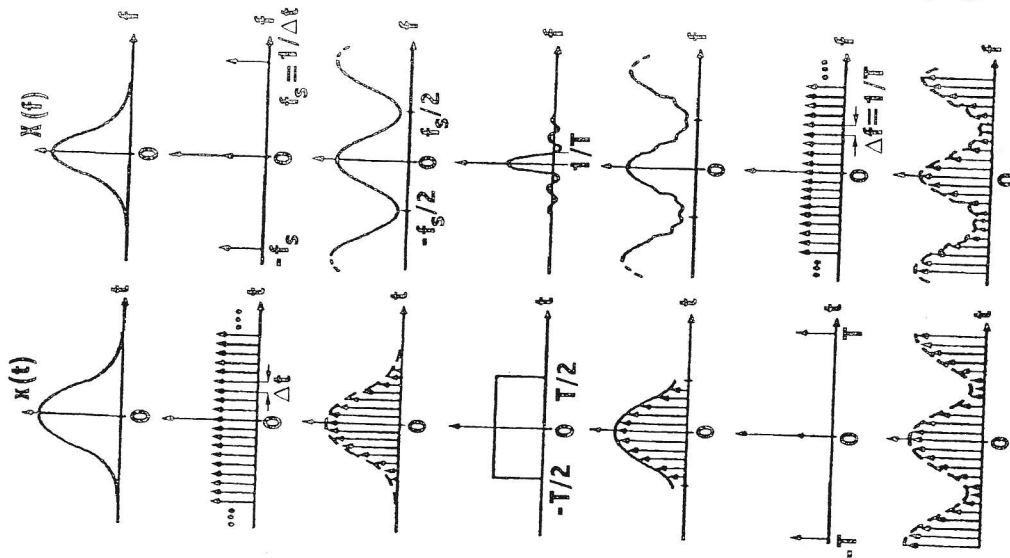


Fig. 27

perciò $N/2$ degli N valori trovati con una DFT si ottengono dai precedenti $N/2$, cioè, non corrispondono ad un reale contenuto del segnale originario in corrispondenza della frequenza $f(N-k)$.

Si mostrerà fra poco che i k nell'intervallo $0 \div \frac{N}{2}$ corrispondono all'intervallo di frequenze da zero alla frequenza di Nyquist $F = \frac{1}{2\Delta t}$ (*folding frequency*; v. dopo) e che quelli nell'intervallo $\frac{N}{2} \div N$ corrispondono alle frequenze negative.

Infatti la frequenza corrispondente a $k = \frac{N}{2}$ è $f = \frac{k}{T} = \frac{N/2}{T} = \frac{1}{2\Delta t}$.

Se si valutano gli $X(k)$ e gli $x(n)$ per valori dell'indice esterni all'intervallo $0 \div N - 1$ si riscontra la proprietà periodica della DFT (circolarità) cioè, la ripetizione dei coefficienti ad intervalli di N (fig. 28).
Infatti per i intero:

$$\begin{aligned} X(k + iN) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi(k+iN)\frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} e^{-j2\pi i n} = X(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} (\cos 2\pi i n - j \sin 2\pi i n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} x(n) = X(k) \end{aligned}$$

Nella fig. 28 $N=16$ e la frequenza di Nyquist corrisponde a $k = N/2 = 8$. Analogamente:

$$x(n + iN) = x(n)$$

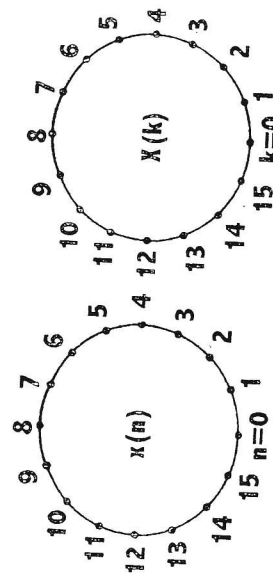


Fig. 28

Ciò apparirà evidente dalla trattazione sull'aliasing che seguirà, in quanto punti sfasati di N punti fra loro corrispondono a sfasamenti di frequenza pari a $f_s = 2F$ (f_s = **frequenza di campionamento** = **sampling rate**, F = **frequenza di ripiegamento** = **Folding frequency** = **Frequenza di Nyquist**) e sinusoidi di frequenza che differiscono fra loro di $f_s = 2F$ (o di multipli interi di $2F$) sono viste come identiche fra loro nel campionamento. Se si valutano gli $X(k)$ per indici negativi si ha:

$$X(-p) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi(-p)\frac{n}{N}} =$$

e moltiplicando per $e^{-j2\pi m\frac{N}{N}}$, che vale 1, l'espressione diviene:

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi m\frac{n}{N}} e^{-j2\pi m\frac{N}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi(m-p)\frac{n}{N}} = X(N-p)$$

cioè il generico $X(N-p)$, che corrisponde alla frequenza $\frac{N-p}{T}$, è uguale

a $X(-p)$, che corrisponde alla frequenza negativa $-\frac{p}{T}$, come si era anticipato.

2.2.4. L'aliasing

Si forniranno inizialmente alcune considerazioni generali, cui si farà seguire la trattazione teorica dettagliata. Il fenomeno dell'aliasing è il risultato della discretizzazione di un segnale continuo originario, campionato con una frequenza di campionamento troppo bassa. La digitalizzazione di un segnale di alta frequenza in tal caso produce esattamente lo stesso insieme di valori discreti che si ottengono digitalizzando un segnale di bassa frequenza. Se una sinusoidale è campionata ad intervalli Δt e la sua frequenza è maggiore di $\frac{1}{2\Delta t}$ essa appare come una frequenza più bassa.

La fig. 29 mostra un esempio: la frequenza di campionamento è $f_s = \frac{1}{\Delta t} = 120$ Hz.

$$F = \text{folding frequency} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2} f_s = 60 \text{ Hz}$$