

Si mostrerà fra poco che i k nell'intervallo $0 \div \frac{N}{2}$ corrispondono all'intervallo di frequenze da zero alla frequenza di Nyquist $F = \frac{1}{2\Delta t}$ (folding frequency; v. dopo) e che quelli nell'intervallo $\frac{N}{2} \div N$ corrispondono alle frequenze negative.

Infatti la frequenza corrispondente a $k = \frac{N}{2}$ è $f = \frac{k}{T} = \frac{N/2}{T} = \frac{N/2}{N\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}$.

Se si valutano gli $X(k)$ e gli $x(n)$ per valori dell'indice esterni all'intervallo $0 \div N - 1$ si riscontra la proprietà periodica della DFT (circolarità) cioè, la ripetizione dei coefficienti ad intervalli di N (fig. 28).
Infatti per i intero:

$$\begin{aligned} X(k + iN) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(k+iN)\frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} e^{-j2\pi i n} = X(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} (\cos 2\pi i n - j \sin 2\pi i n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} x(n) = X(k) \end{aligned}$$

Nella fig. 28 $N=16$ e la frequenza di Nyquist corrisponde a $k = N/2 = 8$. Analogamente:

$$x(n + iN) = x(n)$$

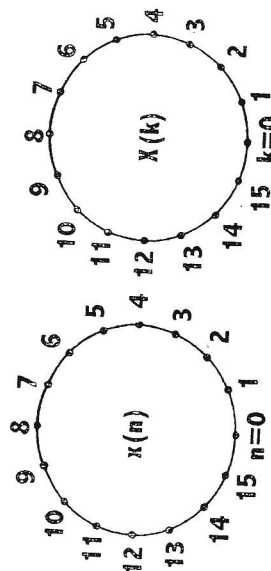


Fig. 28

Ciò apparirà evidente dalla trattazione sull'aliasing che seguirà, in quanto punti sfasati di N punti fra loro corrispondono a sfasamenti di frequenza pari a $f_s = 2F$ (f_s = frequenza di campionamento = sampling rate, F = frequenza di ripiegamento = Folding frequency = Frequenza di Nyquist) e sinusoidi di frequenza che differiscono fra loro di $f_s = 2F$ (o di multipli interi di $2F$) sono viste come identiche fra loro nel campionamento. Se si valutano gli $X(k)$ per indici negativi si ha:

$$X(-p) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(-p)\frac{n}{N}} =$$

e moltiplicando per $e^{-j2\pi\frac{N}{N}}$, che vale 1, l'espressione diviene:

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(-p)\frac{n}{N}} e^{-j2\pi n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(N-p)\frac{n}{N}} = X(N-p)$$

cioè il generico $X(N-p)$, che corrisponde alla frequenza $\frac{N-p}{T}$, è uguale

a $X(-p)$, che corrisponde alla frequenza negativa $-\frac{p}{T}$, come si era anticipato.

2.2.4. L'aliasing

Si forniranno inizialmente alcune considerazioni generali, cui si farà seguire la trattazione teorica dettagliata. Il fenomeno dell'aliasing è il risultato della discretizzazione di un segnale continuo originario, campionato con una frequenza di campionamento troppo bassa. La digitalizzazione di un segnale di alta frequenza in tal caso produce esattamente lo stesso insieme di valori discreti che si ottengono digitalizzando un segnale di bassa frequenza. Se una sinusoidale è campionata ad intervalli Δt e la sua frequenza è maggiore di $\frac{1}{2\Delta t}$ essa appare come una frequenza più bassa.

La fig. 29 mostra un esempio: la frequenza di campionamento è $f_s = \frac{1}{\Delta t} = 120$ Hz.

$$F = \text{folding frequency} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2} f_s = 60 \text{ Hz}$$

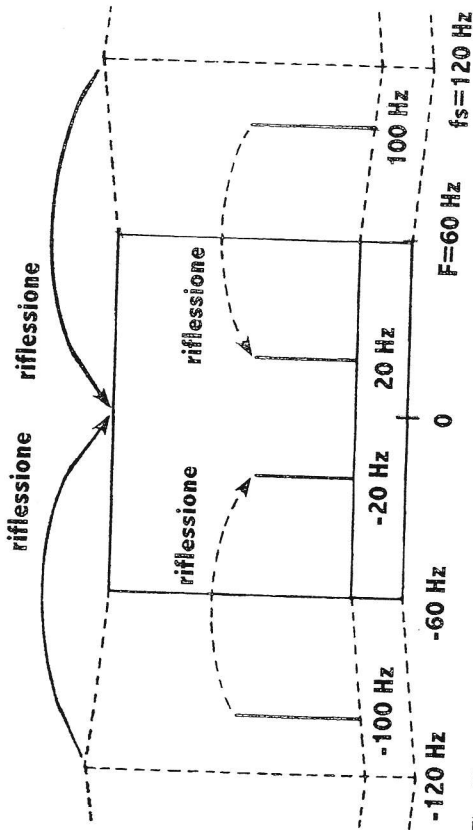


Fig. 29

Un componente del segnale a 100 Hz, cioè 40 Hz al di sopra della F , appare come un segnale a 20 Hz, cioè 40 Hz al di sotto della F , cioè come riflesso specularmente rispetto alla frequenza F .

Prima di svolgere la trattazione teorica completa (che indichi anche cosa accade per segnali di frequenza maggiore di f_s) si esamini l'esempio della fig. 30 per comprendere l'aspetto fisico del fenomeno.

Se ad esempio la sinusoide di fig. 30 è campionata con 9 campionamenti al secondo, cioè con $f_s = 9$ Hz, ma compie 8 oscillazioni in un secondo, cioè ha $f = 8$ Hz, il segnale campionato appare come una sinusoide con frequenza 1 Hz (fig. 30a). Si ha:

f_s = frequenza di campionamento = 9 Hz

F = folding frequency = frequenza di Nyquist = $f_s/2 = 4,5$ Hz

f = frequenza del segnale = 8 Hz

Il segnale ha una frequenza che è situata $f - F = 8 - 4,5 = 3,5$ Hz al di sopra della frequenza di Nyquist ed è quindi visto come un segnale 3,5 Hz al di sotto di questa, cioè con una frequenza $4,5 - 3,5 = 1$ Hz.

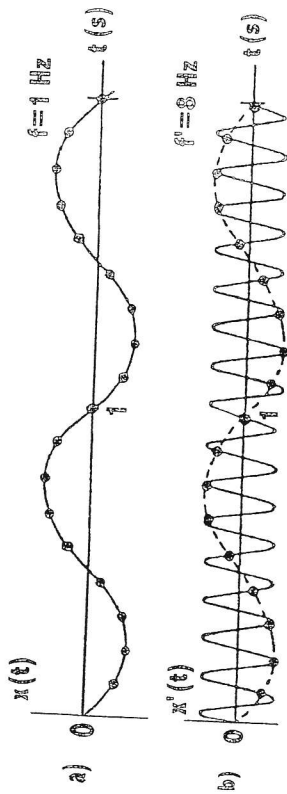
Per analizzare più in dettaglio il fenomeno dell'aliasing occorre innanzitutto ricordare il **teorema del campionamento di Shannon**:

se $x(t)$ è definita per $-\infty < t < \infty$

se $X(f)$, trasformata di Fourier di $x(t)$, esiste

se $X(f)$ è a banda limitata, cioè $|X(f)| = 0$ per $|f| > f_{sup}$

allora se la frequenza di campionamento f_s è tale che $f_s \geq 2 f_{sup}$ la $x(t)$ può essere ricostruita in modo univoco dalla sequenza campionata $x(t)$, con distinzioni, se ve ne sono, in punti isolati.



frequenza di campionamento $f_s = 9$ Hz

Fig. 30

In altri termini occorre campionare a frequenza almeno doppia della più alta frequenza del segnale, cioè, la più alta frequenza del segnale deve essere minore o uguale alla frequenza di Nyquist (folding frequency) $F = f_s/2$.

Esaminiamo ora cosa accade se è presente una frequenza superiore alla frequenza di Nyquist.

Si consideri la sinusoide:

$$x(t) = \sin 2\pi f_0 t$$

con

$$f_0 > F$$

dove

$$F = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t}$$

La frequenza f_0 è dunque A volte la frequenza F , essendo A un coefficiente maggiore di 1, in generale composto da una parte intera i e da una parte decimale d (< 1):

$$f_0 = AF = (i + d) F = (i + d) \frac{1}{2\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\pi f_0 t &= \sin 2\pi \frac{i+d}{2\Delta t} n\Delta t = \sin \pi(i+d)n = \sin \pi i n \cos \pi d n + \cos \pi i n \sin \pi d n = \\ &= \cos \pi i n \sin \pi d n \end{aligned}$$

poiché $\sin \pi i n = 0$ per tutti gli n ; l'intero i può essere pari o dispari.
 Se i è pari $\cos \pi i n = 1$
 e quindi:

$$x(n) = \sin \pi d n$$

Se i è dispari $\cos \pi i n = (-1)^n$
 infatti $\cos \pi$ in vale -1 per n dispari e $+1$ per n pari e quindi

$$x(n) = (-1)^n \sin \pi d n$$

Se i è pari dunque:

$$x(n) = \sin \pi d n = \sin \frac{2}{2} \pi d n \frac{\Delta t}{\Delta t} = \sin 2\pi \frac{d}{2\Delta t} n \Delta t = \sin \pi f_0 n \Delta t$$

avendo chiamato

$$\left(f_0' = \frac{d}{2\Delta t} = d \cdot F \right)$$

la frequenza che effettivamente appare dal segnale campionato.

Così ad esempio segnali aventi frequenza $2,25 F$, $4,25 F$, $6,25 F$, ecc. appaiono tutti come segnali di frequenza $0,25 F$.

Se i è dispari

$$x(n) = (-1)^n \sin \pi d n = \cos \pi i n \sin \pi d n =$$

ed aggiungendo un termine nullo (perché $\sin \pi n = 0$)

$$\begin{aligned} &= \cos \pi i n \sin \pi d n - \sin \pi n \cos \pi d n = \\ &= -(\cos \pi i n \sin \pi d n + \sin \pi n \cos \pi d n) = \\ &= -\sin (\pi n - \pi d n) = -\sin \pi n (1 - d) = \\ &= -\sin \frac{2}{2} \pi n (1 - d) \frac{\Delta t}{\Delta t} = -\sin 2\pi f_0'' n \Delta t \end{aligned}$$

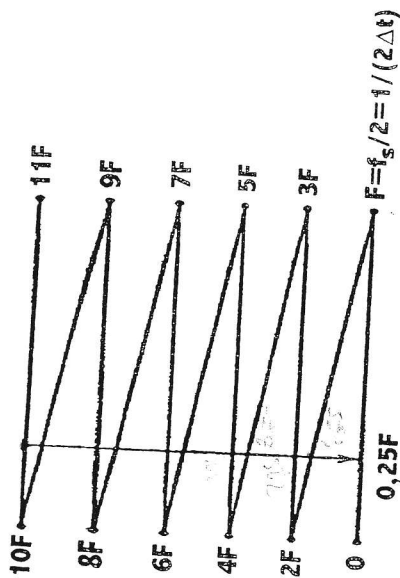


Fig. 31

avendo chiamato

$$f_0'' = \frac{1-d}{2\Delta t} = (1-d)F = d \cdot F$$

la frequenza che effettivamente appare nel segnale campionato.

Così ad esempio segnali aventi frequenza $1,75 F$, $3,75 F$, $5,75 F$, ecc. appaiono tutti come segnali aventi frequenza $0,25 F$. Infatti $F - d \cdot F = F - 0,75 F = 0,25 F$.

In conclusione i risultati generali ottenuti possono essere sintetizzati come riportato nella fig. 31: la scala delle frequenze è ripiegata a fisarmonica e la frequenza che effettivamente appare per effetto dell'aliasing si ottiene per riflessioni, alternativamente attorno all'estremo F , $3F$, $5F$, ... ed attorno all'estremo 0 , $2F$, $4F$, ...

Un altro modo che talora è usato per esprimere gli importanti contenuti della fig. 31 è dato dalla fig. 32.

Per non incorrere nei problemi di aliasing occorre rimuovere dal segnale analogico di ingresso tutti i componenti di frequenza superiore alla frequenza di Nyquist, cioè, filtrare il segnale prima dell'acquisizione con un filtro passa-basso. Un filtro anti-aliasing è dunque un filtro passa-basso. Piuttosto che con un taglio netto di tutte le frequenze al di sopra di un certo valore, tutti i filtri attenuano le frequenze secondo una curva la cui pendenza (roll-off), più o meno grande, viene usualmente definita in dB/ottava. Come i dB sono un modo conveniente per esprimere il

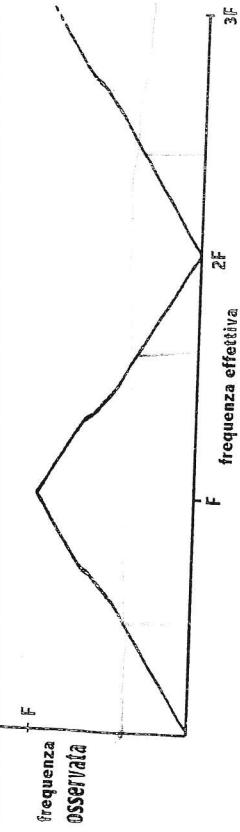


Fig. 32

rapporto fra ampiezze, l'ottava è un metodo conveniente per esprimere il rapporto fra frequenze. Un'ottava corrisponde a un intervallo di frequenze il cui rapporto è pari a due. Idealmente si vorrebbe che la transizione di un filtro fosse uno spigolo vivo, in realtà è una curva di pendenza crescente. Per ottenere una discesa della curva del filtro più rapida possibile, il "roll-off" generalmente comincia all'interno della banda passante desiderata, che in genere è specificata come scostamenti di -3dB (cioè 0,707 volte l'ingresso).

Con riferimento alla fig. 33, relativa a tre filtri con la stessa attenuazione finale di 24 dB/ottava, il **filtro di Butterworth** ha la risposta più piatta all'interno della banda passante, che paga con un lento roll-off iniziale. Il **filtro di Chebyshev** ha il roll-off iniziale più ripido, che paga con oscillazioni nella banda passante. Tutti i filtri, inoltre, introducono sempre un'alterazione della fase. Il **filtro di Bessel** è quello che ha il cambiamento di fase più lineare. Si noti che, pur avendo le tre curve la stessa pendenza finale (andamenti paralleli per frequenze sufficientemente alte), confrontando i valori corrispondenti alla prima ottava a destra della frequenza di taglio si riscontra una differenza di ben 25 dB fra le attenuazioni del filtro di Bessel e di quello di Chebyshev.

Poiché, dunque, i filtri sono inevitabilmente meno che perfetti ed hanno una pendenza di taglio finita, è necessario scartare anche le misure spettrali nell'intorno della frequenza di Nyquist. Ecco perché, una trasformato di Fourier su un'acquisizione di 1024 punti non dà luogo a uno spettro di 512 punti sul display di un analizzatore di Fourier: solo le prime 250-400 linee sono esenti da contaminazione per imperfetto anti-aliasing; uno spettro di frequenze a 400 linee è tipico per un segnale campionato con 1024 punti.

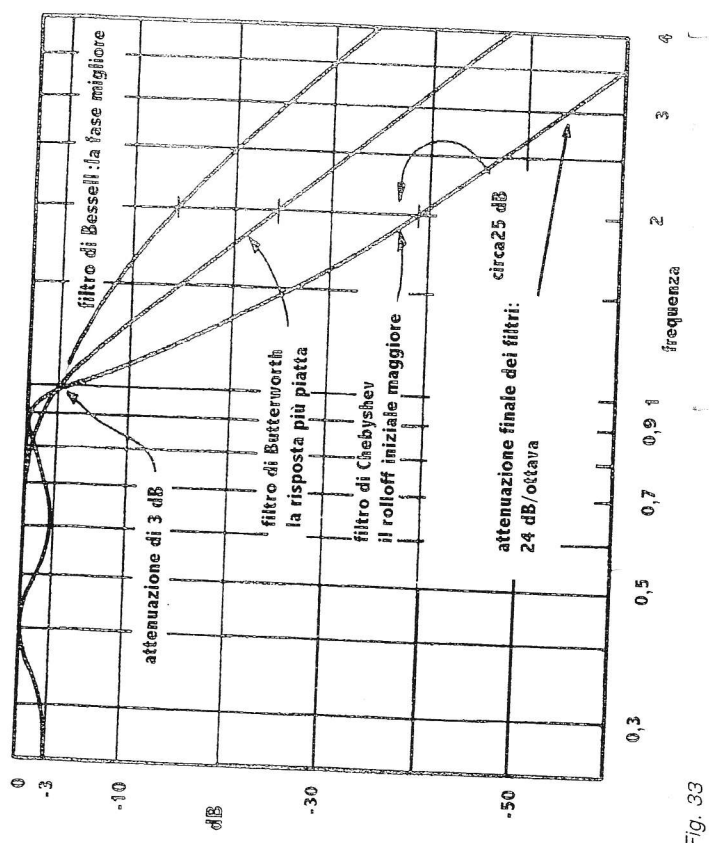


Fig. 33

2.2.5. Il leakage

Parlando di segnali continui si è già mostrato come il troncamento temporale di un segnale produca **leakage**. Si vuol esaminare ora come il campionamento incide sul leakage.

La fig. 34 mostra in a) un caso in cui il leakage non appare, in b) un caso in cui esso è invece evidente.

Il campionamento nel dominio delle frequenze produce il cosiddetto "effetto palizzata" (**picket-fence effect**). Se si pensa alla DFT come ottenuta per campionamento dell'integrale di Fourier, si comprende come il campionamento, a seconda di come posiziona le osservazioni rispetto allo spettro continuo, può nel caso più favorevole rilevare solo il massimo del lobo centrale e gli zeri degli altri lobi e quindi non rilevare il leakage presente nella fig. 35; nel caso più sfavorevole può far perdere il massimo del lobo centrale, evidenziandone i fianchi e rilevare i massimi dei lobi la-

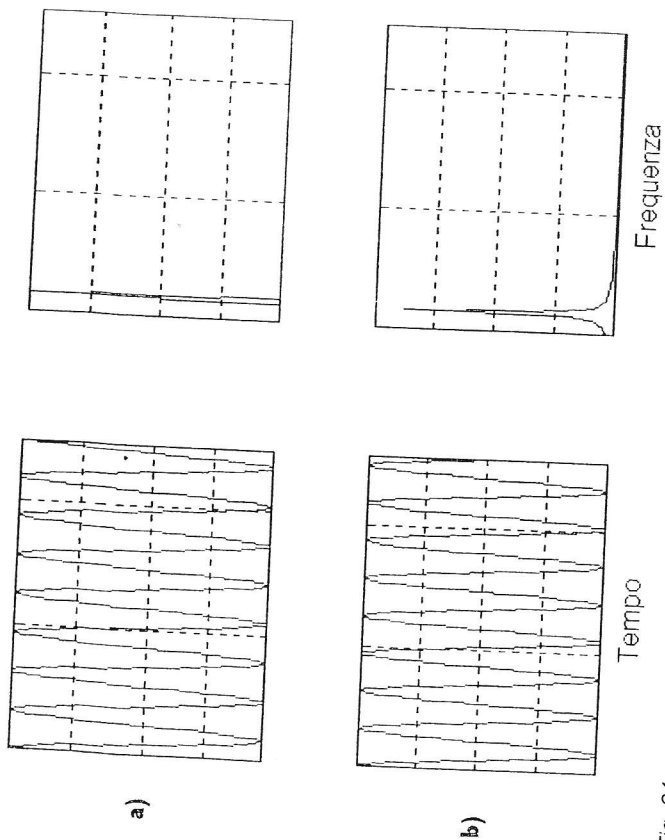


Fig. 34

terali. Il primo caso si manifesta quando la finestra temporale di osservazione contiene esattamente un numero intero di periodi, il secondo caso si manifesta quando la finestra di osservazione contiene un numero intero di periodi più un ulteriore semiperiodo. Nel caso generale la finestra di osservazione contiene un numero non intero di periodi ed i campionamenti cadono sfasati rispetto al massimo lobo centrale e agli zeri dei vari lobi.

Si consideri ad esempio la fig. 36, che prende in esame una cosinusoidale di frequenza tale che un numero intero di periodi corrisponda esattamente alla finestra di osservazione. Il campionamento nel tempo corrisponde al prodotto della funzione per un treno di impulsi.

Siccome la trasformata di un treno di impulsi distanti temporalmente di Δt è un treno di impulsi distanti $\frac{1}{\Delta t}$ nel campo delle frequenze e al prodotto di funzioni nel dominio del tempo corrisponde la convoluzione nel dominio delle frequenze, e siccome gli intervalli $\frac{1}{\Delta t}$ sono tali che nell'in-

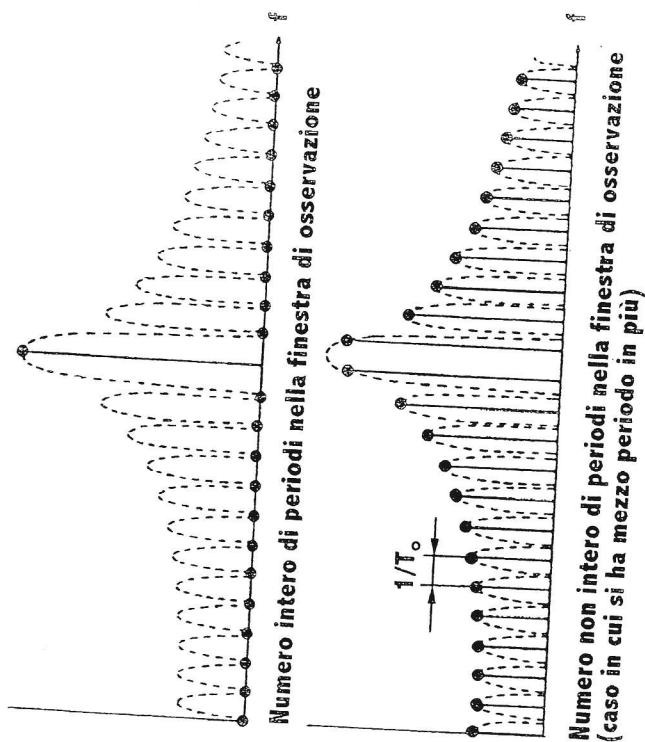


Fig. 35

tervallo definito da $\pm F = \pm \frac{1}{2\Delta t}$ (frequenza di Nyquist) si risente solo l'impulso centrale (quello per $f = 0$), la trasformata è ancora la curva a lobi punteggiata. Quando si passa alla DFT, tale curva viene vista con l'effetto palizzata e le frequenze che vengono viste sono $f_k = \frac{k}{N\Delta t}$ cioè i punti campionati hanno ascisse $0, \frac{1}{N\Delta t}, \frac{2}{N\Delta t}, \dots$ e distano fra loro di $1/T$.

I lobi laterali distano fra loro di $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{N\Delta t}$ è tale è pure la distanza fra il massimo e gli zeri del lobo principale. La posizione del massimo del lobo principale è data da $1/T$.

Se T_0 è multiplo intero di T cioè, se $T_0 = mT$ (m intero) si ha $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{m} \frac{1}{N\Delta t}$ e perciò i campionamenti in frequenza cascano in corri-

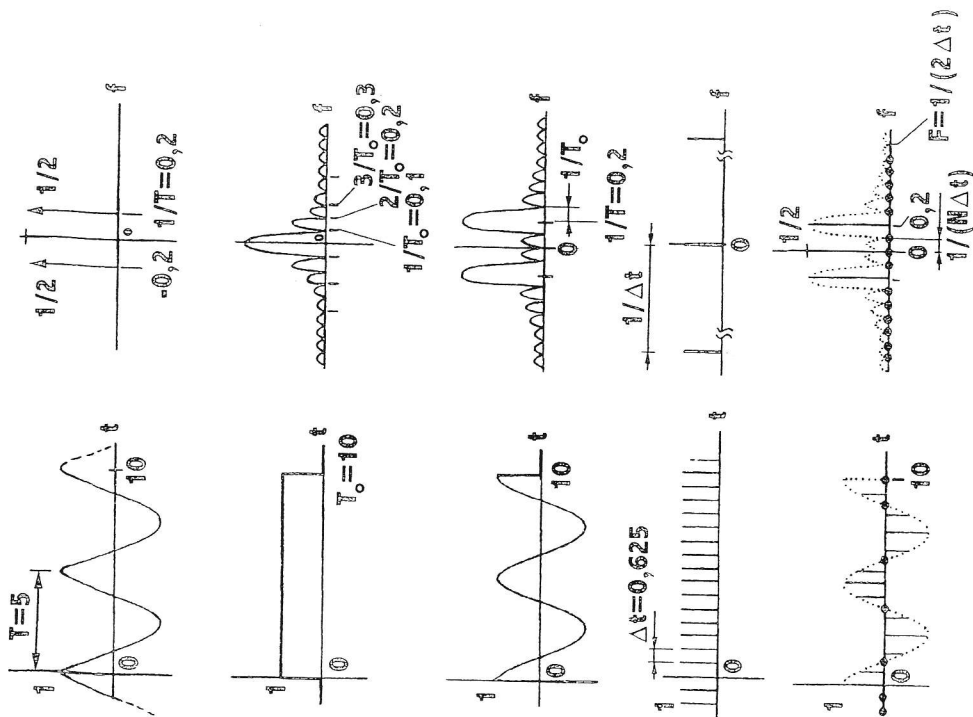


Fig. 36

spondenza del massimo del lobo principale e quindi anche in corrispondenza dello zero di tutti i lobi.

Se invece T_0 non è un multiplo intero di T si ha uno sfasamento fra picco e zeri e campionamenti, come indicato nella fig. 37, che, a parità di T_0 ha un T minore rispetto alla fig. 36 (si ha mezza cosinusoidale in più nella finestra temporale).

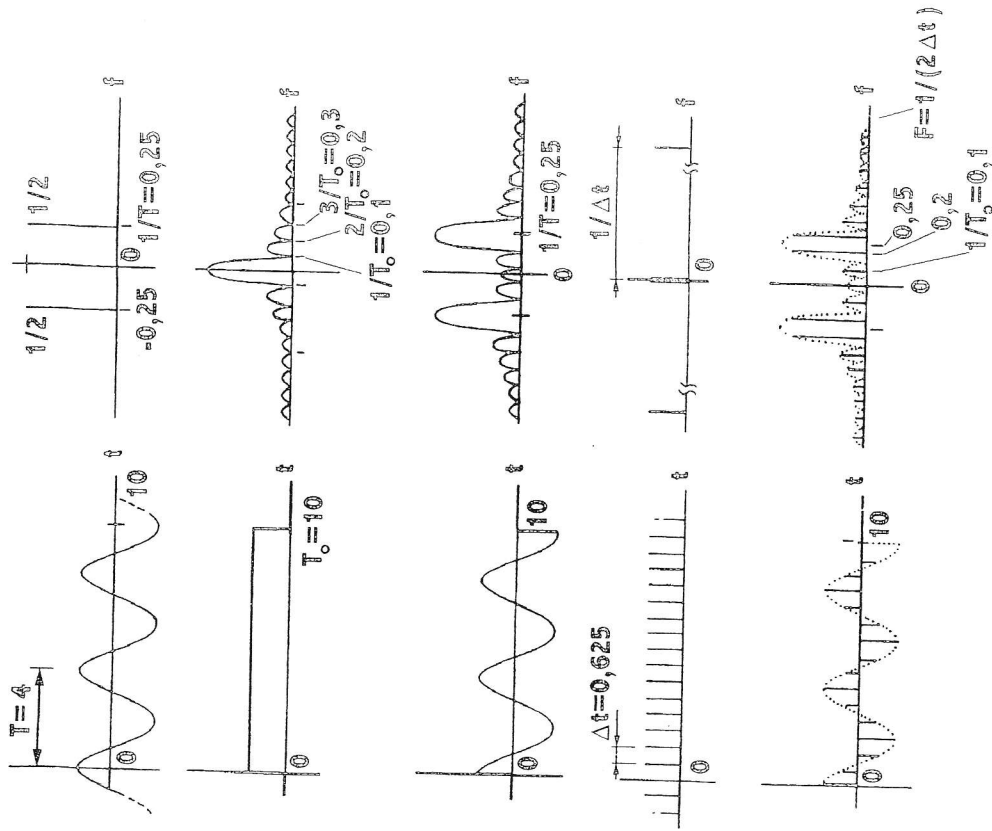


Fig. 37

Il fatto che per T_0 multiplo esatto di T si ottengono esattamente solo gli impulsi come nel caso della serie di Fourier non deve stupire, perché la periodicità supposta dalla DFT fa sì che in realtà si stia esaminando un segnale cosinusoidale che prosegue senza discontinuità anche fuori dalla finestra di campionamento (fig. 38a). Se invece T_0 non è un multiplo esatto

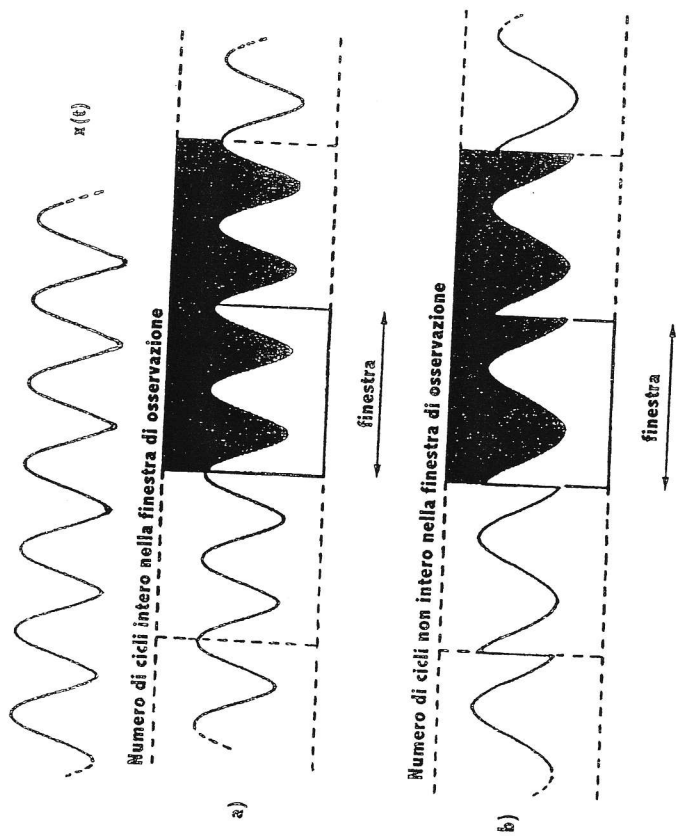


Fig. 38

di T , la DFT analizza il segnale periodico indicato nella fig. 38b, che è diverso dall'originario.

Si esaminino ora i **rimedi per il leakage**.

Un primo metodo potrebbe essere quello di scartare la parte finale di un'acquisizione effettuata, mantenendo solo i punti relativi a un numero finito di cicli (fig. 39a). La difficoltà nasce però quando l'algoritmo per la FFT prevede uno specifico numero di valori campionati; per esempio un algoritmo basato sulle potenze di 2 può trasformare solo records composti da 2, 4, 8, 16, ... 2ⁿpunti.

Una soluzione alternativa, per quanto più complessa, potrebbe essere quella di mantenere il numero di punti, quello previsto dall'algoritmo (512 nella fig. 39b), ed interpolare l'andamento corrispondente a un numero finito di cicli con un numero di punti diverso (512 anziché, 410 nella fig. 39b), ad esempio, con un' interpolazione lineare.

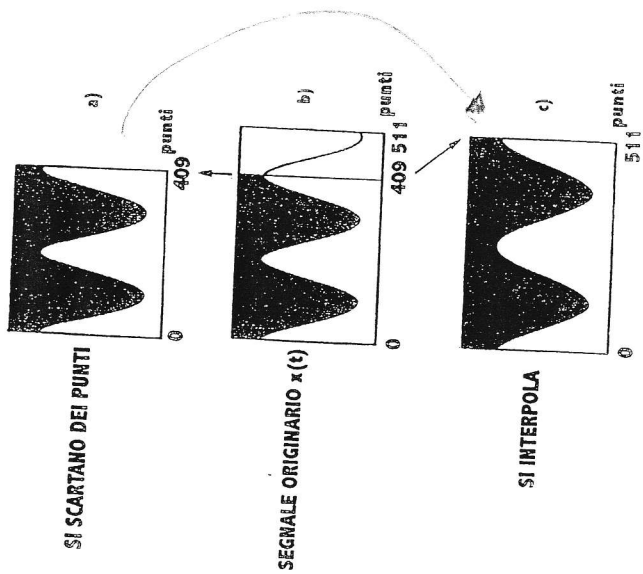


Fig. 39

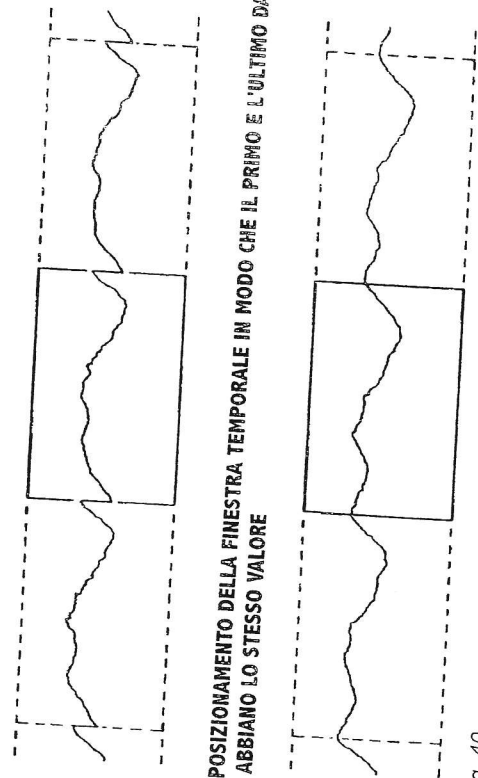


Fig. 40

Si può posizionare la finestra temporale in modo che i dati inizino e terminino allo stesso livello (fig. 40); l'eliminazione di tale discontinuità può non eliminare interamente il leakage, ma certo giova a ridurlo.

Per ridurre le discontinuità agli estremi della finestra e ridurre il leakage si possono usare delle finestre temporali (*weighting functions*) diverse quisiuzione temporale (fig. 41).

Le finestre temporali definiscono l'ampiezza nell'intervallo $0 \leq t \leq T_0$ al di fuori del quale l'ampiezza è nulla. La finestra di Hanning è del tipo coseno al quadrato, poiché $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$. Infatti, se si sposta l'origine dei tempi nell'istante $t = T_0/2$ per definire l'intervallo di tempo fra $-T_0/2$ e $T_0/2$ anziché fra 0 e T_0 e se si chiama τ il nuovo tempo, si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{T_0}{2} \leq \tau \leq \frac{T_0}{2} \quad t &= \tau + \frac{T_0}{2} \\ \cos \frac{2\pi\tau}{T_0} &= \cos \frac{2\pi\left(\tau + \frac{T_0}{2}\right)}{T_0} = \cos \left(\frac{2\pi\tau}{T_0} + \pi\right) = -\cos \frac{2\pi\tau}{T_0} \end{aligned}$$

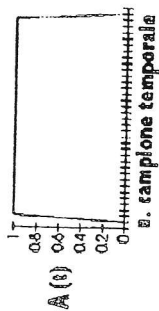
da cui

$$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi\tau}{T_0}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\tau}{T_0}\right) = \cos^2 \frac{2\pi\tau}{2T_0}$$

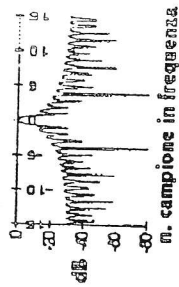
La finestra di Hamming è un coseno al quadrato con piedistallo, cioè rialzato. La finestra flat-top si usa ad es. per segnali sinusoidali puri utilizzati per eseguire delle calibrazioni; in questo caso si ha interesse soprattutto alla determinazione dell'ampiezza e non tanto della frequenza. Questa maggiore precisione di misura dell'ampiezza si paga con una notevole perdita di risoluzione in frequenza perché, come si vede, il lobo centrale in frequenza è molto allargato.

Quando si applica una finestra temporale, si alterano l'ampiezza e l'energia del segnale. La fig. 41 riporta il **fattore di correzione w_a dell'ampiezza ed il fattore di correzione w_e dell'energia**, calcolati per ogni singola finestra. Talora è importante avere una precisa stima dell'ampiezza del segnale; in altri casi, come nel caso di analisi a banda larga, non è importante avere una stima di elevata qualità dell'ampiezza di ogni linea spettrale, ma piuttosto ottenere una buona stima dell'energia del segnale.

FINESTRA RETTANGOLARE
 $A(t) = 1 \quad 0 \leq t \leq T_0$

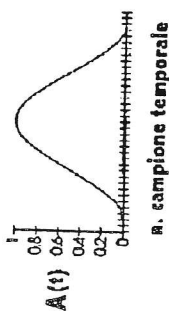


$w_a = 1$
 $w_e = 1$

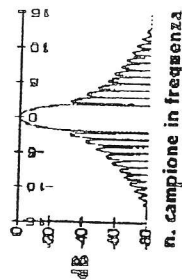


FINESTRA DI HANNING

$$A(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T_0} \right) \right]$$

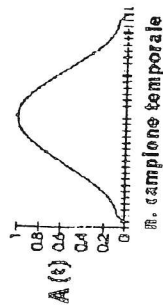


$w_a = 2$
 $w_e = 1,63$



FINESTRA DI HAMMING

$$A(t) = 0,54 - 0,46 \cos \left(\frac{2\pi t}{T_0} \right)$$



$w_a = 1,85$
 $w_e = 1,59$

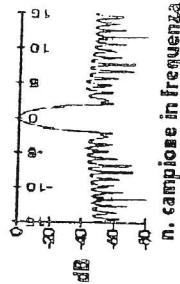
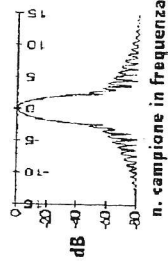
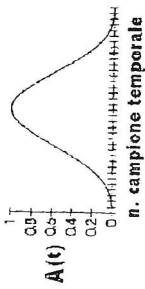


Fig. 41

FINESTRA DI KAISER-BESSEL

$$A(t) = 0,402 - 0,498 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) + 0,098 \cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}\right) + 0,001 \cos\left(\frac{6\pi t}{T_0}\right)$$

$0 \leq t \leq T_0$



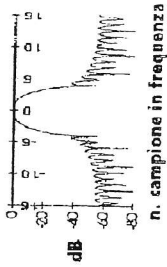
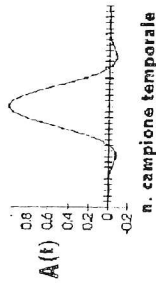
$$W_s = 2,49$$

$$W_e = 1,86$$

FINESTRA FLAT-TOP

$$A(t) = 0,2395 - 0,4481 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) + 0,2585 \cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}\right) + 0,0439 \cos\left(\frac{6\pi t}{T_0}\right)$$

$0 \leq t \leq T_0$



$$W_s = 4,18$$

$$W_e = 2,26$$

Fig. 41 - Segue

Se si confronta ad esempio una finestra rettangolare ed una di Hanning (fig. 42), non solo il più alto lobo laterale è più basso di circa 20 dB nella finestra di Hanning, ma anche la pendenza di attenuazione dei lobi laterali è molto maggiore.

È interessante confrontare l'effetto di una finestra rettangolare e di una finestra di Hanning quando vengono applicate ad una sinusoide (fig. 43). La fig. 43a corrisponde ad una durata dell'acquisizione pari ad un multiplo intero del periodo: non si rileva leakage.

La fig. 43b corrisponde a un numero dispari di semiperiodi; il segnale inizia e termina allo stesso livello ma la durata dell'acquisizione non è un multiplo intero del periodo: compare il leakage, che peraltro è molto minore con la finestra di Hanning.

Si noti anche la presenza di un componente DC, cioè, a frequenza zero, per effetto di un valor medio non nullo. Le ampiezze alle alte frequenze sono basse.

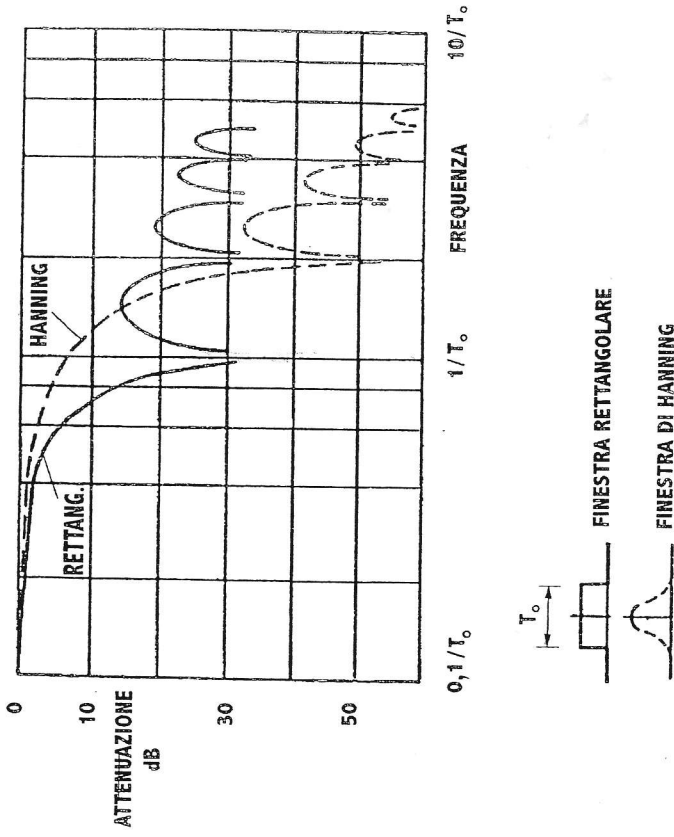


Fig. 42

La fig. 43c corrisponde allo stesso segnale della fig. 43b, ma con fase differente; si ha un numero dispari di semiperiodi, ma anche la massima discontinuità agli estremi, che sono a livelli differenti (uno massimo, l'altro minimo). Il leakage è ancora molto minore con la finestra di Hanning. Non si ha componente DC, essendo il valor medio nullo. La discontinuità agli estremi produce un elevato contenuto di alte frequenze.

Se si analizza in continuità una sinusoide senza alcuna sincronizzazione fra il segnale e le successive acquisizioni, con una finestra rettangolare un analizzatore di Fourier fornisce una spettro che fluttua fra le situazioni limiti delle figg. 43b e 43c.

La finestra di Hanning può peraltro essere dannosa se il segnale analizzato è un transitorio, in quanto applica differenti pesature al transitorio stesso all'interno della finestra temporale. Nella fig. 44a il segnale transitorio è posizionato all'inizio della finestra temporale ed è fortemente alterato dalla finestra di Hanning rispetto a quello della fig. 44b, in cui il se-

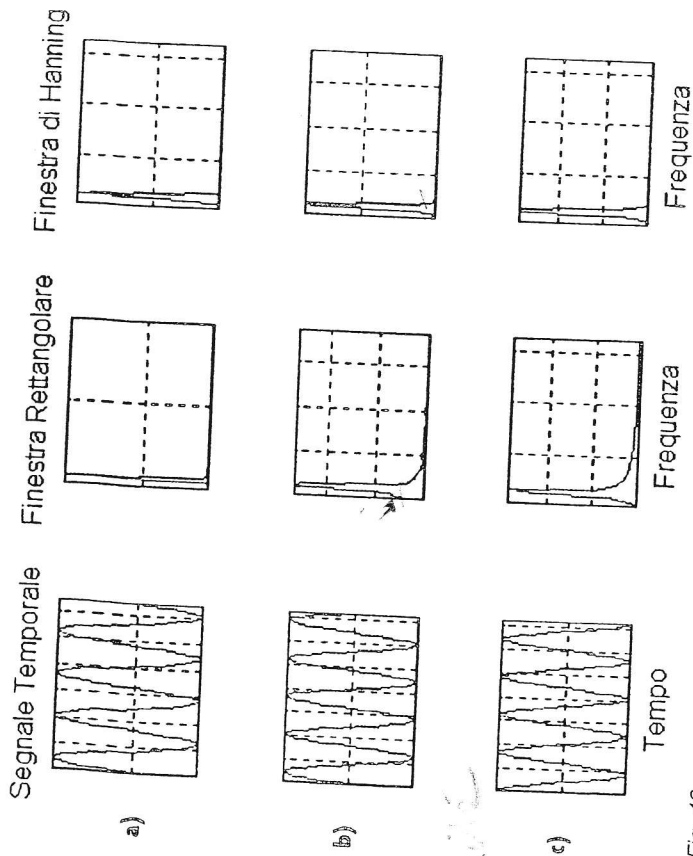


Fig. 43

gnale transitorio è posizionato al centro della finestra. Nella fig. 44b la forma d'onda data dalla finestra di Hanning, che è abbastanza piatta nella zona centrale, è simile a quella data dalla finestra rettangolare; il valore più elevato è dovuto al fatto che spesso si adotta un valore 2 per l'ampiezza di picco della finestra di Hanning, cioè, al suo centro.

In sintesi: la finestra di Hanning si usa per lunghi segnali continui, la finestra rettangolare per corti transitori.

Si usano finestre esponenziali (decrescenti) per transitori in cui la maggior parte dell'informazione importante è concentrata nella parte iniziale del record temporale (e si vuole ad esempio neutralizzare il rumore di fondo che si fa sentire nella parte finale dell'acquisizione quando il segnale principale tende a zero). Più specificamente si faccia ad esempio riferimento a prove mediante martello strumentato (ad es. per analisi modale): il segnale d'ingresso è il segnale impulsivo della forza misurata da un accelerometro e costituita dalle combinazioni di sinusoidi la cui ampiezza

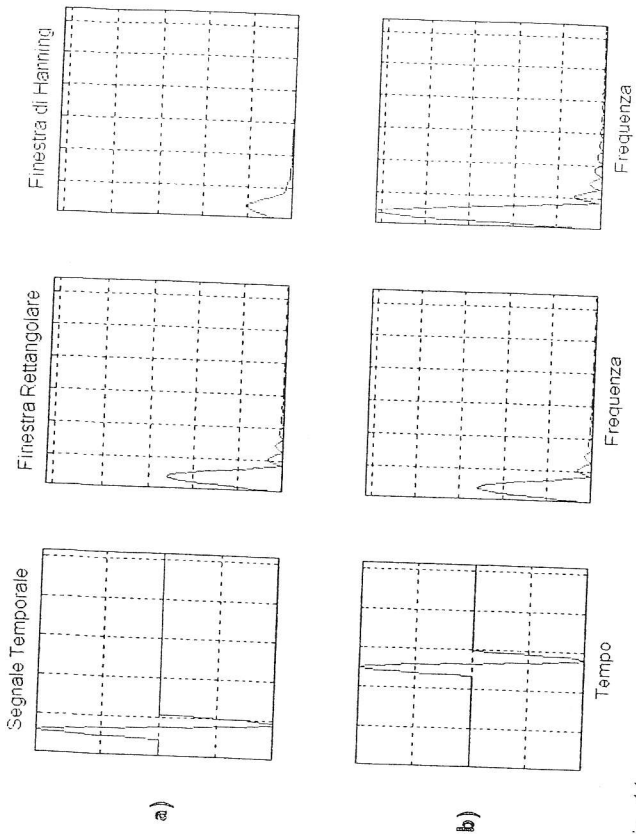


Fig. 44

decade nel tempo. Se la struttura è poco smorzata o se la durata dell'acquisizione è relativamente breve, la risposta non è ancora andata a zero al termine della finestra di misura, con conseguenti discontinuità e leakage. Moltiplicando la risposta per una funzione esponenziale, si porta praticamente a zero la risposta alla fine dell'acquisizione; ciò equivale ad aggiungere una quantità *nota* di smorzamento al sistema. Se al contrario la struttura è molto smorzata, nuovamente una finestra esponenziale può essere utile; in sua assenza il segnale, dopo essere andato a zero relativamente presto, sarebbe corrotto per i tempi successivi dal rumore di digitalizzazione presente intorno allo zero.

Per quanto riguarda il segnale di eccitazione, poiché l'impulso è di breve durata, ogni rumore durante il resto del tempo di acquisizione della forza è indesiderabile. Applicare una finestra che sia unitaria durante l'impulso e vada poi a zero, mantenendosi fino alla fine dell'acquisizione, fornisce una soluzione a tale problema di rumore. La fig. 45 mostra andamenti tipici dell'eccitazione impulsiva e della risposta ad essa e le corrispondenti finestre della forza (normalmente chiamata force window) ed esponenziale.

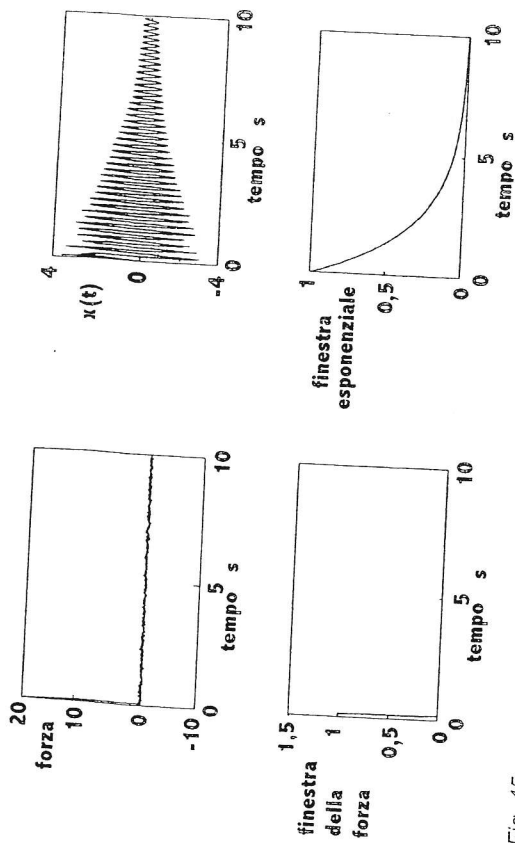


Fig. 45

Sintetizzando si può dire che la scelta della finestra dipende sia dallo scopo dell'analisi sia dal tipo di segnale. Più ampio è il lobo centrale, peggiore è la risoluzione in frequenza, perché diventa più difficile distinguere frequenze adiacenti di ampiezza simile. D'altro canto la selettività, cioè la capacità di rivelare un piccolo componente vicino ad un altro grande, cresce al crescere della pendenza di decadimento dei lobi laterali. La *finestra rettangolare* si usa quando il leakage non è un problema, quindi o con segnali periodici o nel caso di impulsi o transitori in cui la funzione è per sua natura nulla all'inizio ed alla fine del periodo di acquisizione. La *finestra di Hanning* è quella più usata per scopi generali, ma ha una bassa attitudine a distinguere fra frequenze vicine di ampiezza simile e quindi non è adatta per misure accurate di piccoli segnali. La *finestra di Hamming* differisce dalla precedente nell'altezza dei lobi laterali e per una minore pendenza di decadimento dei lobi laterali. La *finestra di Kaiser-Bessel* è adatta a distinguere segnali costituiti da toni multipli di livelli molto differenti; può causare più leakage di una finestra di Hanning quando usata per un segnale aleatorio. La *finestra flat-top* è utile per misure precise di ampiezza di segnali con una singola frequenza (toni puri). La *finestra per la forza* si usa per le prove di impatto, definendo la percentuale del blocksize durante la quale essa deve avere valore unitario. La *finestra esponenziale* si applica a segnali transitori per farli decadere entro il tem-

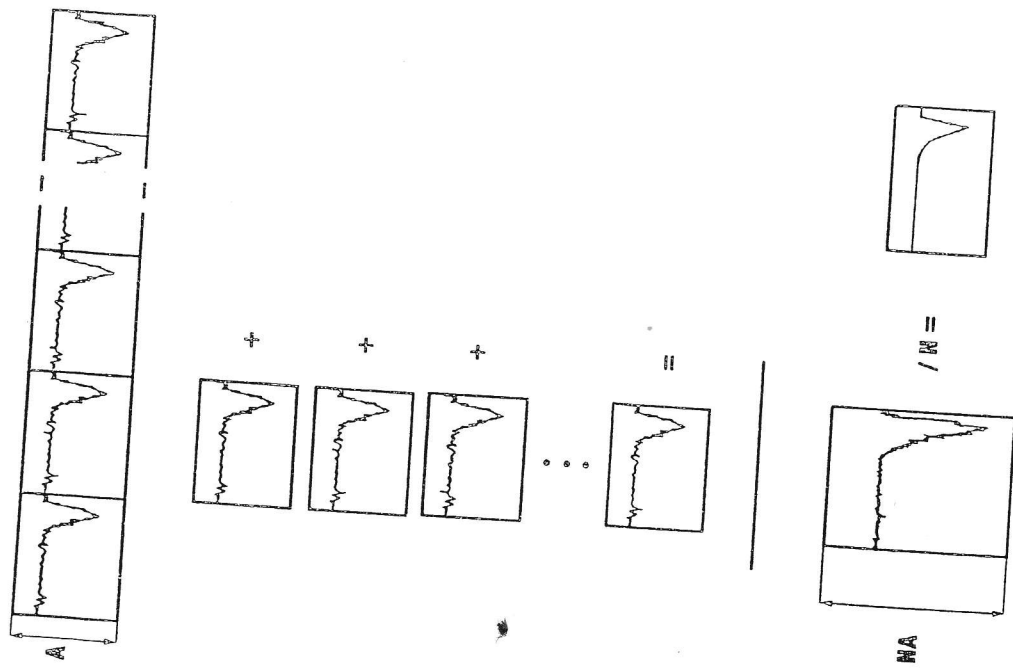


Fig. 46

po di acquisizione, definendo come parametro della finestra il livello percentuale del valore finale rispetto a quello iniziale.