Matematica: base delle discipline scientifiche.
Fisica: scienza che studia le leggi della natura. Pur basandosi sulla matematica, necessita spesso di approssimazioni.
I fenomeni (eventi osservabili) sono descritti da grandezze fisiche, che sono variabili misurabili.
Il modo in cui gli eventi si verificano e le cause che li determinano sono descritti dalle leggi fisiche.
Meccanica: branca della fisica che studia il movimento in termini scientifici, ovvero fisico-matematici.
Risultati basati sulla metodologia sperimentale e validati su base statistica.

Sommario

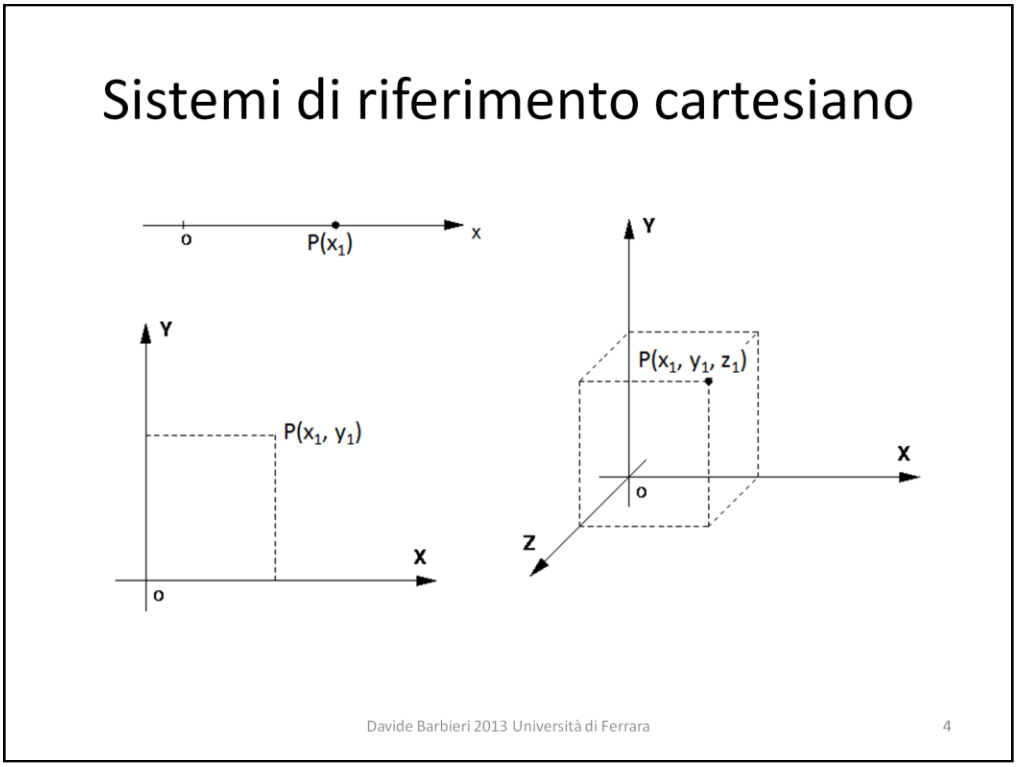
- Trigonometria
- Calcolo vettoriale
- Funzioni matematiche
  - Derivate
  - Integrali

TRIGONOMETRIA

Sistemi di riferimento

Angoli

Funzioni fondamentali

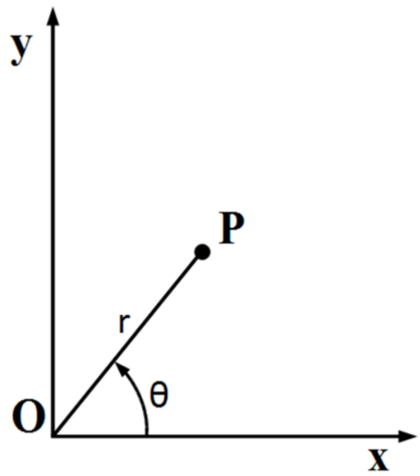


Un sistema di riferimento è un insieme di coordinate che permettono di individuare un oggetto nello spazio/tempo.

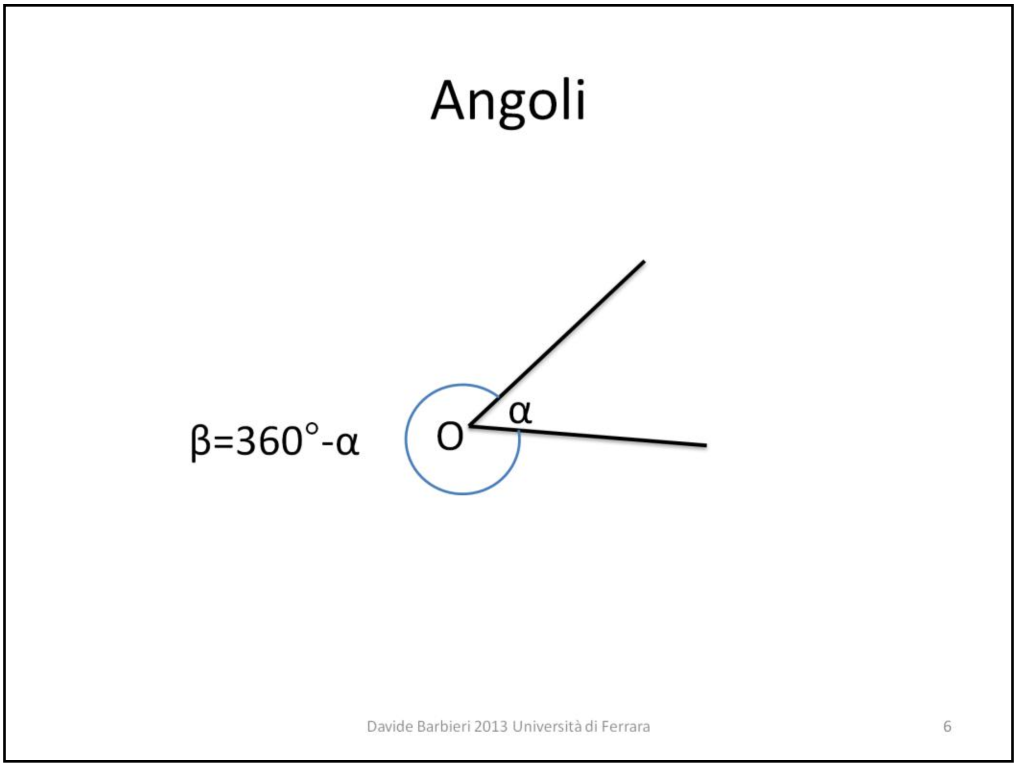
Un sistema di riferimento cartesiano è formato da n rette orientate, una per ogni dimensione, che si intersecano in un punto detto origine.

1. Unidimensionale. Può essere utilizzato per descrivere uno spostamento lungo un tratto rettilineo di pista di atletica, ma anche per le lunghe distanze, ove interessi solo lo spazio percorso dallo start. Oppure può essere usato nel valutare le performance di un atleta che si immerge in apnea in assetto variabile, se l'unica direzione che interessa è quella ortogonale alla superficie del mare.
2. Bidimensionale: per descrivere un movimento su una superficie, come una gara di nuoto in acque libere, o una corsa campestre in piano.
3. Tridimensionale: necessario nei casi in cui gli spostamenti lungo tutte le tre direzioni dello spazio siano notevoli, come nel trekking o nelle ultra-trail, dove una valutazione del dislivello è fondamentale per analizzare e comprendere la performance.

Sistema di riferimento polare



Un sistema di riferimento polare individua un punto P sul piano utilizzando due coordinate: r, distanza del punto dall'origine O, e θ, angolo che r forma con l'asse orizzontale x. L'angolo è positivo se orientato in senso anti orario.



Trigonometria: studio geometrico degli angoli.

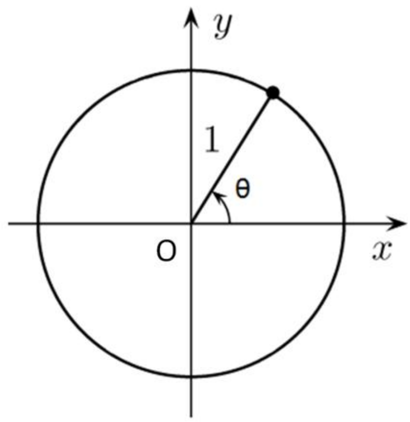
Angolo: ciascuna delle due parti (semipiani) in cui risulta diviso un piano da due semirette aventi origine comune.

Unità di misura degli angoli: gradi o radianti.

Radiante: rapporto tra lunghezza arco (sotteso da angolo α) e raggio, $\alpha = l/R$

Poiché la circonferenza $c = 2\pi R$, l'angolo giro in radianti $\alpha = 2\pi = 360°$ → radianti : gradi = 2π : 360→ radianti = gradi*(π/180); gradi = radianti*(180/π)

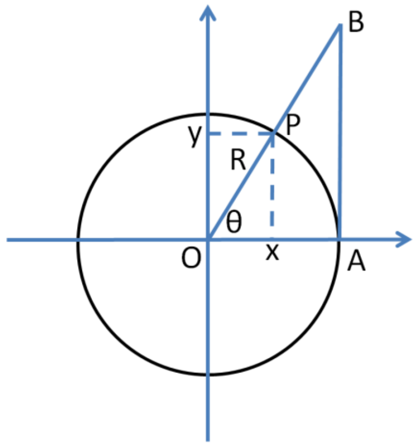
Circonferenza trigonometrica



Circonferenza trigonometrica: R=1 e angolo orientato positivamente in senso antiorario (per convenzione).
Angolo nullo quando il raggio che congiunge il centro a un punto della circonferenza giace sull’asse x.
Origine in O, sistema di riferimento cartesiano (assi ortogonali) bidimensionale.

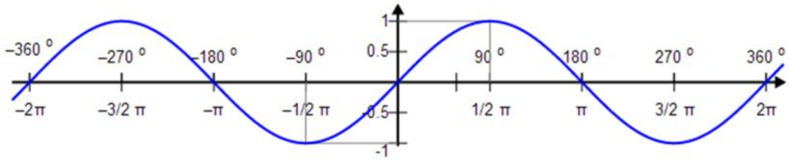
Funzioni fondamentali

$$sen\theta = y / R$$
$$\cos\theta = x / R$$
$$tg\theta = y / x = sen\theta / \cos\theta$$

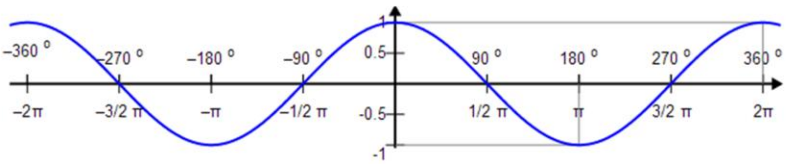


La posizione del punto P(x,y), che si trova sulla circonferenza, è funzione dell'angolo θ.
La funzione seno dell'angolo θ è definita come il rapporto tra l'ordinata del punto P e il raggio: sen θ = y/R
La funzione coseno è definita come il rapporto tra l'ascissa del punto P e il raggio: cos θ = x/R
Per cui per passare alle coordinate cartesiane y = R sen θ e x = R cos θ.
$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, infatti per il teorema di Pitagora $y^2+x^2 = R^2 \rightarrow R^2sen^2\theta + R^2cos^2\theta = R^2$
Se R=1 allora y = sen θ e x = cos θ.
La tangente dell'angolo θ è il rapporto tra y e x: tg θ = y/x = sen θ/cos θ.
Essa rappresenta la tangente alla circonferenza che interseca la retta contenente il raggio (nella figura è AB).
Infatti, poiché i triangoli AOB e xOP sono simili (cioè hanno angoli uguali), vale la proporzione:
AB : OA = y : x → AB = OA*(y/x). AB, cioè la tangente, è uguale a y/x, visto the OA = R = 1

Andamento di seno e coseno



Seno



Coseno

Seno e coseno sono funzioni periodiche dell’angolo θ, sfasate di 90°.

Valori notevoli

Radianti	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
Gradi	0	30	45	60	90	180
Seno	0	1/2	√2/2	√3/2	1	0
Coseno	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1
tangente	0	√3/3	1	√3	∞	0

$-1 < \text{sen}\,\theta < +1$
$-1 < \cos\theta < +1$
$-\infty < \text{tg}\,\theta < +\infty$

CALCOLO VETTORIALE

Scalari e vettori

Somma e differenza

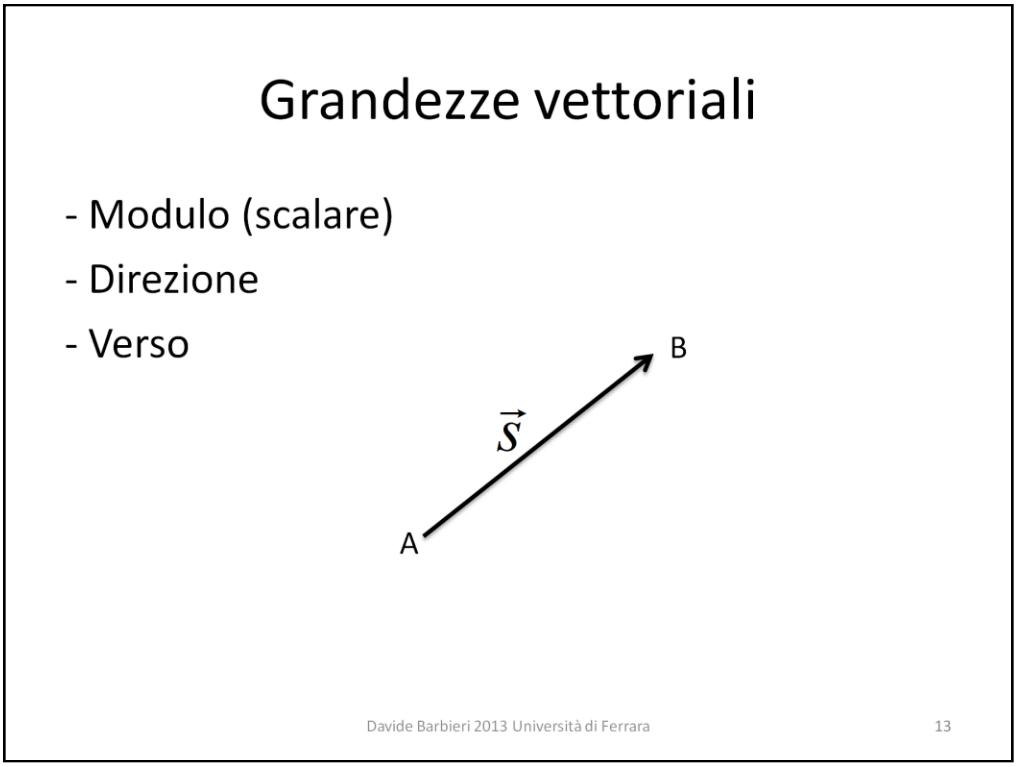
Prodotti

Grandezze scalari

Determinate da un numero e da una unità di misura. Es.

- Massa m [kg]
- tempo t [s]
- temperatura T [°C]
-...

Grandezze scalari: descritte da un solo valore numerico, con unità di misura
Massa: misura della quantità di materia di un corpo fisico. Ad essa è correlata l'inerzia di un corpo.
Principio di inerzia (primo principio della dinamica): "Un corpo persiste nel proprio stato di quiete o moto rettilineo uniforme, fino a che non interviene una forza a mutare il suo stato".
Tempo: dimensione fisica (misurata in secondi) che misura il trascorrere degli eventi.



In meccanica, le grandezze vettoriali, come lo spostamento, la velocità, l'accelerazione ecc. sono descritte da tre componenti:
-Modulo (o intensità)
-Direzione
-Verso
Per es. il vettore **s** ha un modulo |AB|, una direzione e un verso da A a B.
L'intensità di un vettore è uguale al suo modulo (per es. l'intensità di una forza).
I vettori hanno inoltre un punto di applicazione.
Il modulo è uno scalare, cioè una quantità numerica con una unità di misura (per es. 10 m per uno spostamento, oppure 50 km/h nel caso di una velocità).
Direzione e verso invece sono identificati da un segmento orientato (con una freccia).
La lunghezza del segmento è proporzionale al modulo del vettore.

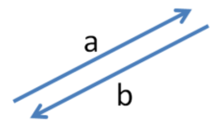
Somma e differenza

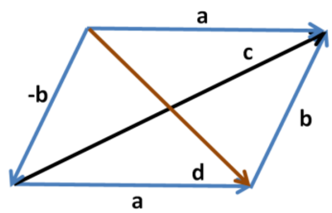
$$v = |\vec{v}|$$

$$\vec{a} = -\vec{b}$$

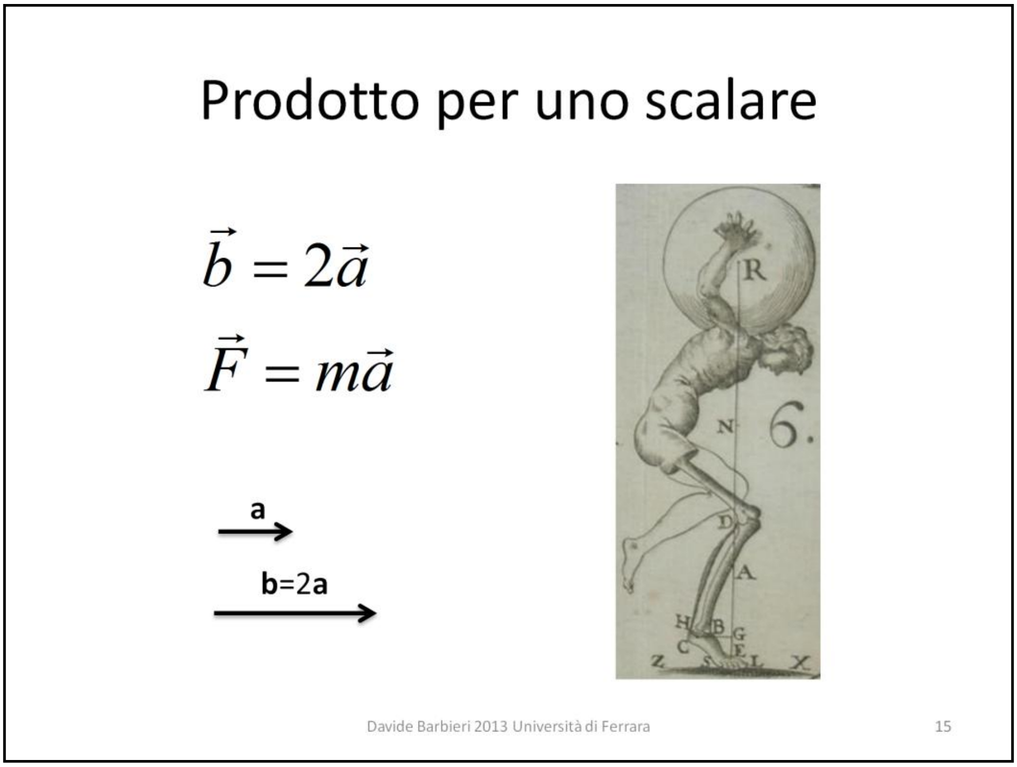
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

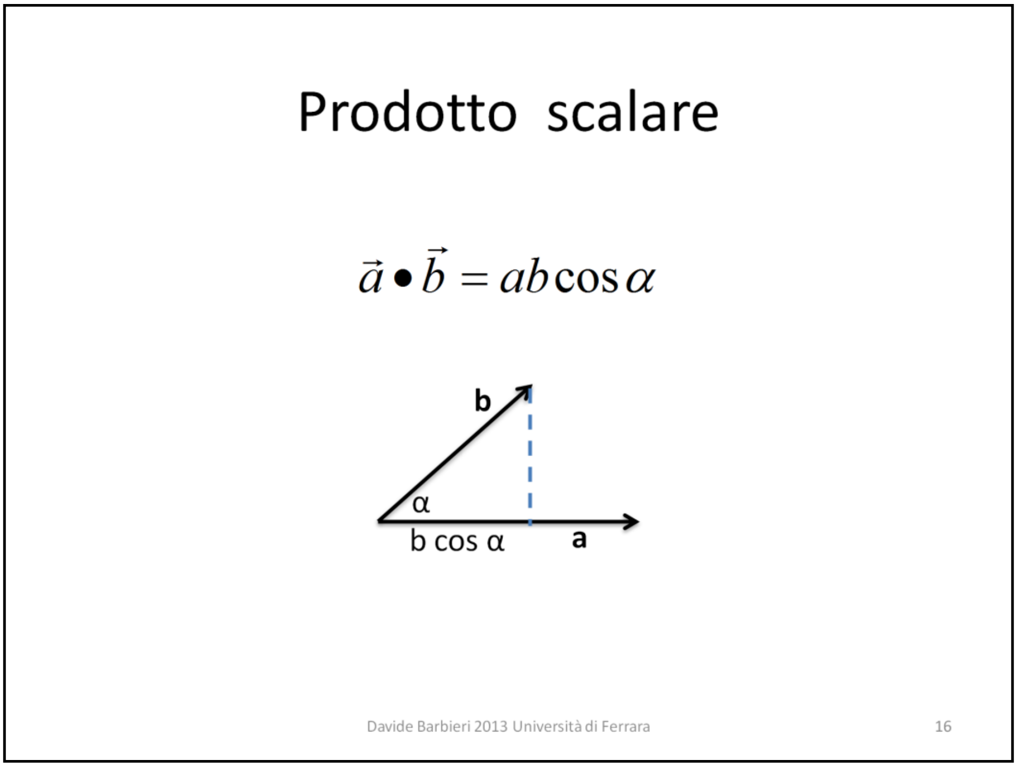




Due vettori sono uguali se hanno modulo, direzione e verso uguali.
Due vettori sono opposti se hanno stesso modulo, stessa direzione e verso opposto.
Somma e differenza: regola del parallelogramma o della spezzata.



Prodotto di uno scalare per un vettore: **b** = k**a**
Il risultato è un vettore che ha stessa direzione e stesso verso del vettore iniziale, e modulo pari a k|**a**| = ka.
Se mentre pedalo sul piano aumento l'intensità dello sforzo, mantenendo la stessa direzione e lo stesso verso di percorrenza della strada, allora sto moltiplicando il modulo della velocità per un fattore k. Nel caso in cui la velocità raddoppi, k=2.
La forza è un esempio noto di prodotto per uno scalare. Infatti è definita come prodotto di massa (scalare) per accelerazione (vettore): **F** = m**a** (secondo principio della dinamica, o di Newton).



Il prodotto scalare di due vettori è uno scalare: **a·b** = ab cos α.
Gode della proprietà commutativa: **a·b** = **b·a**
Geometricamente, è assimilabile alla proiezione ortogonale di un vettore sull'altro (quando **a** ha lunghezza unitaria).

Esempio 1

Davide Barbieri 2013 Università di Ferrara 17

Il vento soffia a 2,2 m/s con un angolo di 30° rispetto al rettilineo principale della pista di atletica e con verso positivo rispetto all'avanzamento (quindi a favore). Le prestazioni degli atleti sono valide ?

Definito $\mathbf{i_x}$ il versore (vettore unitario, $|\mathbf{i_x}|=i_x=1$) lungo la direzione x che congiunge la linea di partenza col traguardo, l'intensità (modulo della velocità) del vento parallelo alla direzione di avanzamento è $v_x = 2.2\ i_x \cos 30° = 2.2*\sqrt{3}/2 \approx 1,90$ m/s→ le prestazioni possono essere convalidate.

Esempio 2

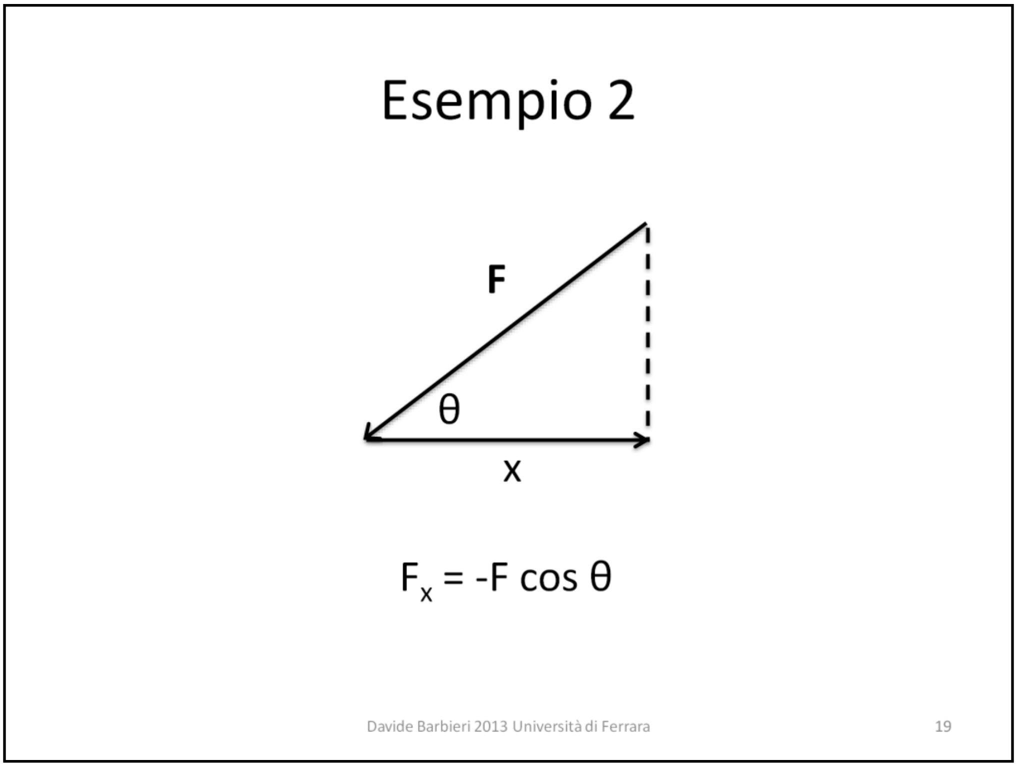
- **F**= forza muscolare
- θ: angolo di applicazione rispetto al suolo
- F_x ?

Davide Barbieri 2013 Università di Ferrara 18

La forza generata dalle gambe di un velocista è pari a **F**.

La direzione di applicazione della forza ha un angolo θ rispetto al suolo.

Quanta forza (propulsione) viene generata in direzione opposta all’avanzamento x ?
Solo una parte della forza generata da un velocista è diretta in modo da determinare l’avanzamento.
Quella ortogonale all’avanzamento, cioè quella verticale, serve per sostenere il baricentro dell’atleta, contrastando la forza di gravità.

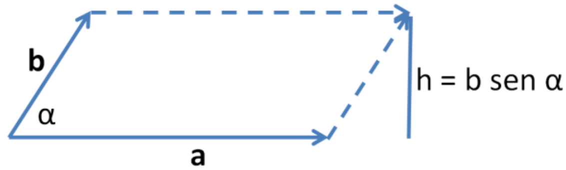


Soprattutto in partenza (cioè quando è fermo), l'atleta cerca una posizione del corpo quanto più orizzontale possibile, al fine di spingere in direzione opposta all'avanzamento. I blocchi, che sono inclinati rispetto all'orizzontale, agevolano il velocista.
Lo spostamento in avanti è dovuto al terzo principio della dinamica (azione e reazione: $\mathbf{F}_{AB}=-\mathbf{F}_{BA}$). La componente propulsiva (parallela ma opposta all'avanzamento) è $Fx = -F \cos\theta$.
Minore è θ, maggiore la spinta in avanti.

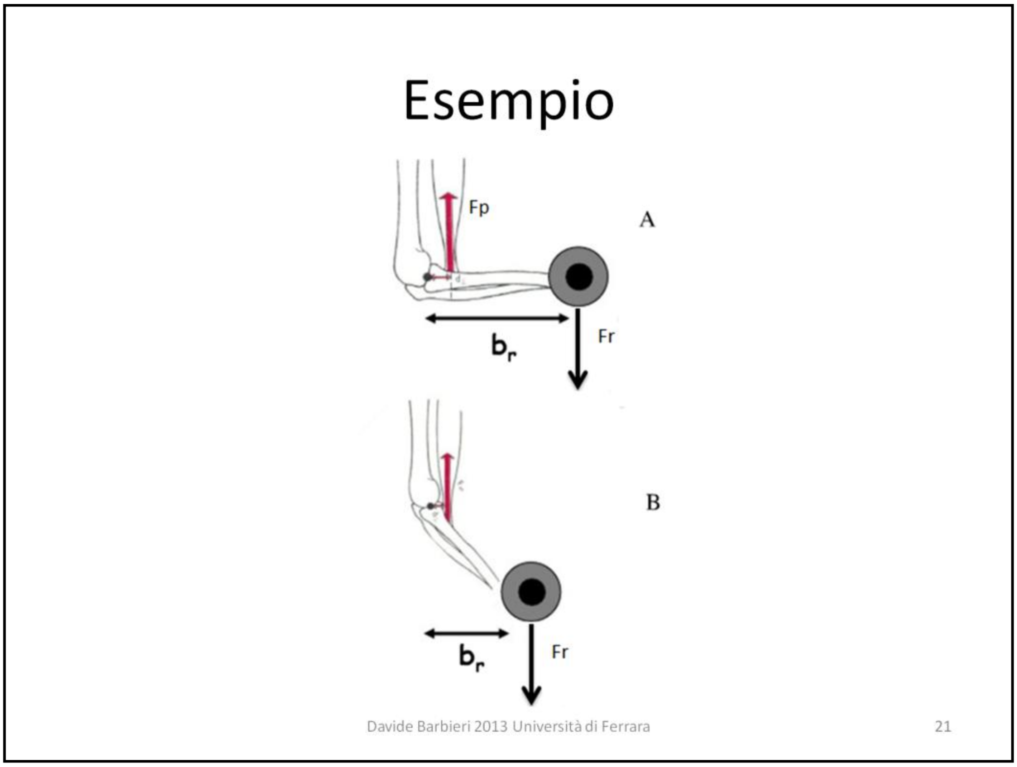
Prodotto vettoriale

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$c = ab \sin \alpha$$



Prodotto vettoriale **a** x **b**: vettore di modulo ab sen α; α: angolo <180° compreso tra i due vettori.
Direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori.
Verso: regola della mano destra.
Geometricamente rappresenta l'area del parallelogramma individuato da **a** e **b**.
A = base * altezza = a * (b sen α)
Es. momento meccanico di una forza **M** = **r** x **F** (es. leve, lancio del disco …)



Le due forze $\mathbf{F_p}$, generata dal muscolo, e $\mathbf{F_r}$, generata dal manubrio, individuano un piano e producono due momenti, $\mathbf{M_p}$ e $\mathbf{M_r}$, che hanno la stessa direzione ma verso opposto.
$\mathbf{M_p}$ esce dal piano, mentre $\mathbf{M_r}$ entra nel piano.
Se il peso si solleva significa che $M_p > M_r$, cioè che $F_p \times r_p = F_p r_p \text{sen } \theta_p > F_r \times r_r = F_r r_r \text{sen } \theta_r$, dove r_p è il braccio della forza F_p , r_r il braccio della forza F_r e θ_p e θ_r gli angoli compresi tra le due forze e i rispettivi bracci. In questo esempio, i due bracci sono vettori orientati verso il fulcro, cioè il centro di rotazione dell’articolazione.
In quale posizione il modulo del momento $\mathbf{M_r}$ generato dal manubrio è massimo?
In A, dove l’angolo tra il braccio a cui è applicato il peso a l’azione della gravità è 90°.

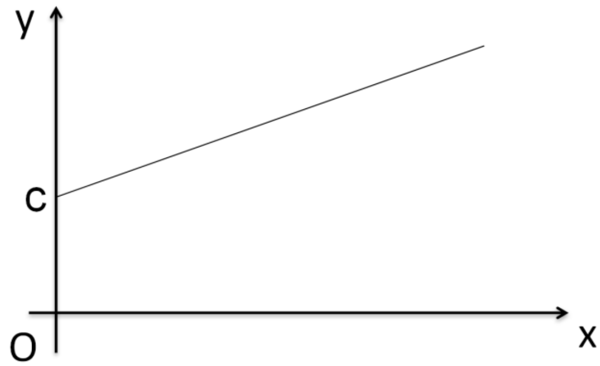
FUNZIONI

Funzioni del tempo

Derivate

Integrali

Funzioni



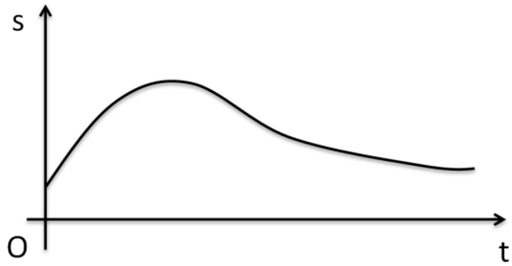
$$y = ax + c$$

Davide Barbieri 2013 Università di Ferrara 23

Relazione univoca tra due o più variabili. Es. $y=f(x)$, due variabili.
Relazione che associa a un elemento dell'insieme di partenza (dominio), un solo elemento dell'insieme di arrivo (codominio).
x: variabile indipendente; y: variabile dipendente (funzione di x). Per ogni valore di x, esiste un solo valore possibile di y.
a: coefficiente angolare.

Movimento

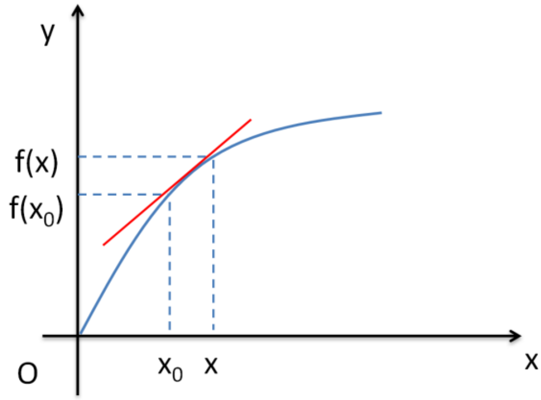
Tempo e spazio → movimento: s=f(t)
relativamente a un sistema di riferimento



Davide Barbieri 2013 Università di Ferrara   24

Movimento: variazione di posizione in funzione del tempo.
Qualsiasi movimento richiede tempo: s = f(t)
Per Kant: spazio e tempo sono forme pure “a priori”, non definibili, ma percepite in modo immediato dal soggetto.
Intuitivamente, il tempo è associato al cambiamento (di cui una delle forme possibili è il movimento): se c’è cambiamento, il tempo scorre e, analogamente, senza cambiamento non si “percepisce” il trascorrere del tempo.
Il tempo colloca gli eventi nella dimensione del divenire. Realtà quadridimensionale: tre dimensioni spaziali + il tempo.

Derivate



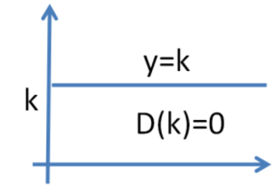
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

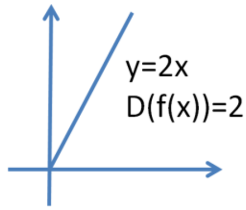
Davide Barbieri 2013 Università di Ferrara 25

Derivata: variazione di una funzione al variare della variabile indipendente.
Definizione: limite del rapporto incrementale.
$f'(x_0)= \lim (f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$ con $x \to x_0$
Coefficiente angolare della tangente alla funzione in x_0.

Derivate notevoli

- $D(k)=0$
- $D(x)=1$
- $D(ax)=a$
- $D(ax^n)=nax^{(n-1)}$



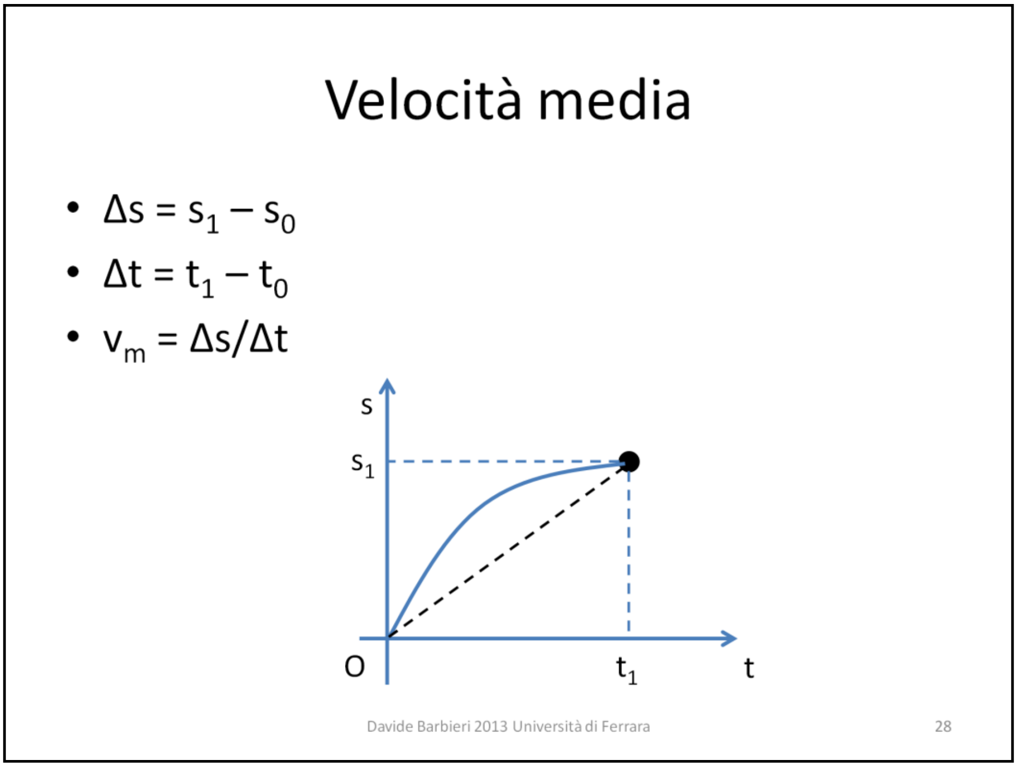


La derivata di una costante è uguale a 0 (non ha inclinazione).
La derivata di una funzione lineare ax è uguale ad *a*, cioè al coefficiente angolare.
Più in generale, per le funzioni polinomiali $y=ax^n+bx^{(n-1)}+\ldots \Rightarrow y'=anx^{(n-1)}+\ldots$
Es. $D(3x^2)=3*2x^{(2-1)}=6x$

Velocità

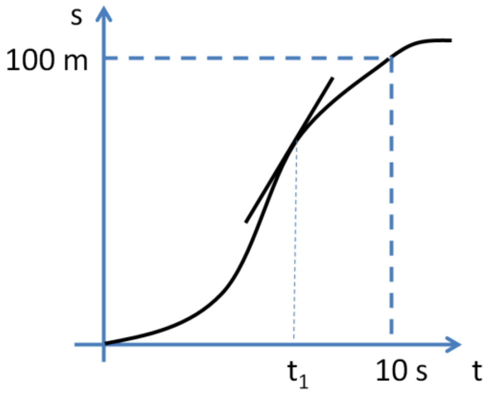
- Movimento: cambio di posizione di un corpo
- Al movimento è associata la velocità: la variazione di posizione al variare del tempo

Velocità: rapporto tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo.
Velocità vettoriale: intensità, direzione e verso.
Velocità scalare: solo modulo.



La velocità media è il rapporto tra la variazione di posizione (lo spostamento) e quella di tempo: $v_m=\Delta s/\Delta t$ (rapporto incrementale).
In termini dimensionali: [v]=[m]/[s]
$\Delta s=s_1-s_0$; $\Delta t=t_1-t_0$
Condizione iniziale: $s(t_0) = s_0$
Se $s_0 = 0$ allora $\Delta s = s_1$ e se $t_0 = 0$ allora $\Delta t = t_1 \rightarrow v = s_1/t_1$
Es. velocista che percorre 100 m in 10 s: velocità media = 10 m/s.
La velocità media è una costante ed è rappresentata da un segmento che congiunge il punto di partenza e quello di arrivo.

Velocità istantanea



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Se $\Delta t \to 0$: la velocità media approssima quella istantanea e la curva s(t) approssima una retta.
Velocità istantanea in t_1 è una derivata, ovvero il limite per $t \to 0$ del rapporto incrementale tra spostamento e tempo trascorso.
$v(t_1)$ rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva s(t) nel punto di coordinate $(t_1, s(t_1))$.
Es. velocista percorre 100 m in 10 s, partendo da fermo. Raggiunge la velocità massima tra i 50 e i 60 m (coefficiente angolare massimo, massima pendenza della curva). Dopo i 100 m la velocità torna rapidamente a 0 (orizzontale).
Esiste almeno un punto tra 0 e 10 s in cui la velocità istantanea è uguale a quella media.
Velocità istantanea (in m/s) ≈ velocità media in una frazione di secondo (es. 0,1 s).

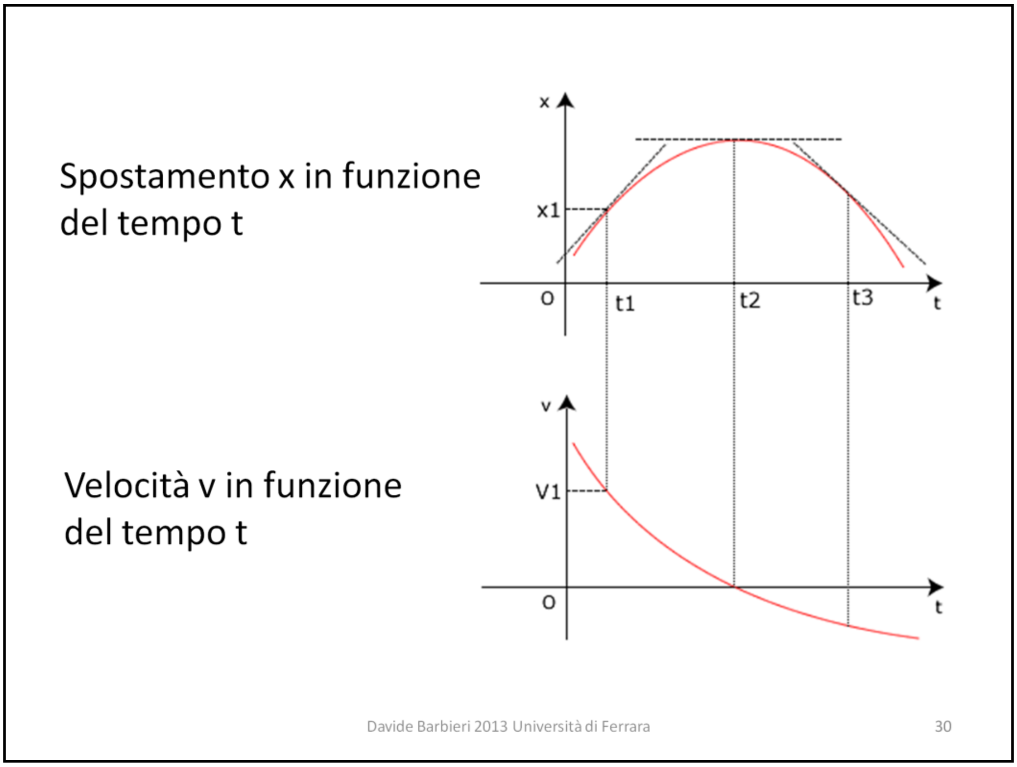
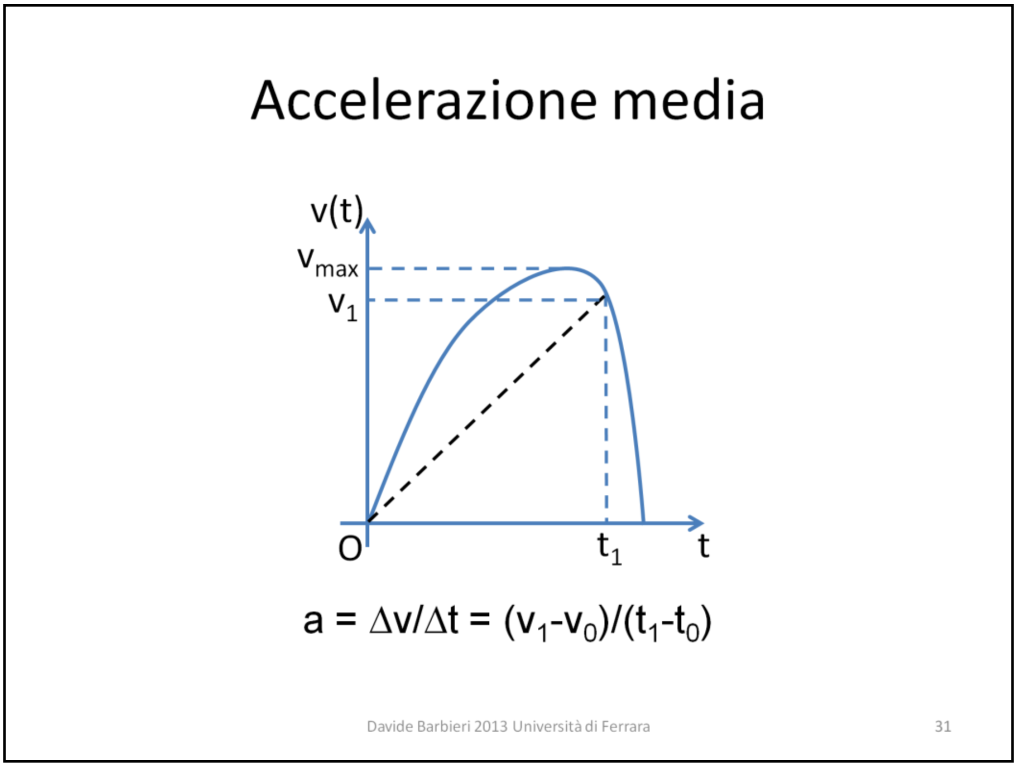


Grafico spazio-tempo e relativo grafico velocità-tempo.

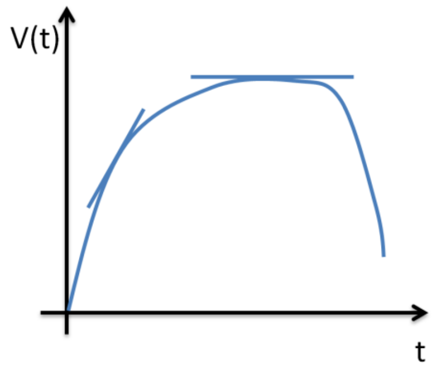
Inizialmente la distanza x dall'origine aumenta e la velocità è positiva, ma in calo.

Raggiunta la distanza massima la velocità è nulla, poi diventa negativa e la distanza x si riduce fino a tornare a quella iniziale.



L’accelerazione misura la variazione di velocità in funzione del tempo.
Accelerazione media: $a = \Delta v/\Delta t = (v_1-v_0)/(t_1-t_0)$. E’ una segmento rettilineo.
Per es. se la velocità all’istante $t_0=0$ è uguale a 0 e dopo t_1 secondi di gara è pari a v_1, allora l’accelerazione media in questo tratto è uguale a v_1/t_1
In termini dimensionali $[a]=[m]/[s^2]$. L’accelerazione istantanea può però essere più alta (come all’inizio, nel grafico di esempio) o più bassa (come a t_1).

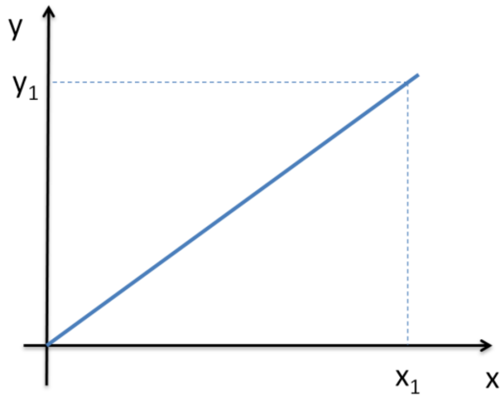
Accelerazione istantanea



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

L'accelerazione istantanea è la derivata prima della velocità e quindi la derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo.
Essa descrive come varia la velocità v(t) in funzione del tempo.
Es. nei 100 m l'atleta (tempo totale circa 10 s) parte da fermo all'istante t=0, accelera rapidamente fino a raggiungere la velocità massima dopo circa 6 s, la mantiene per altri 2 s, poi la riduce lievemente fino alla fine della gara. Dopo il traguardo, l'atleta rallenta in modo voluto e la velocità cala rapidamente.
Se consideriamo i 10 s di gara, l'accelerazione media è data dal coefficiente angolare della retta che congiunge l'origine col punto v(t=10).
Se a = 0 → v = cost

Integrali



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = P(x_1) - P(x_0)$$

Integrale: funzione inversa della derivata. Rappresenta area sottesa da curva (funzione) nel piano cartesiano.
P: primitiva, ovvero la funzione che è stata derivata.

Integrali definiti

$$y = f(x) = 2x$$

$$x_1 = 3$$

$$x_0 = 0$$

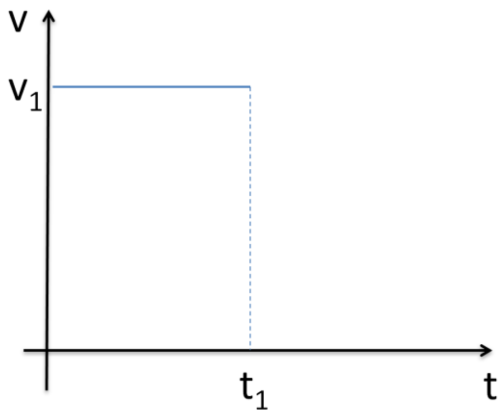
$$\int_{x_0}^{x_1} 2x\,dx = 2(\frac{x_1^2}{2}) - 2(\frac{x_0^2}{2}) = 2(9/2) = 9$$

$$\int ax^n dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Davide Barbieri 2013 Università di Ferrara 34

L'area del triangolo descritta da una funzione lineare y=2x , compresa tra x=0 e x=3, ha base 3 e altezza 2*3=6.
Pertanto l'area sottesa dalla funzione è 3*6/2=9.
Risolviamo l'integrale: la primitiva di 2x è $2x^2/2=x^2$, infatti la derivata di $x^2/2$ è 2x/2, cioè x.
In x=3 $\Rightarrow$ x^2=9.

Esempio



$v(t)=cost=10$ m/s; $t_0=0$; $t_1=5$ sec

Un velocista nel tratto lanciato procede a una velocità costante di 10 m/s.
Dopo 5 secondi, se ha mantenuto la velocità costante, quanti metri ha percorso?

Soluzione

$$v(t) = 10m/s$$

$$t_1 = 5s$$

$$t_0 = 0s$$

$$\int_{t_0}^{t_1} 10dt = 10(t_1 - t_0) = 10 \cdot 5 = 50m$$

50 m sono l’area del rettangolo di base 5 e altezza 10.
L’unità di misura del risultato è [m], infatti 10[m/s] * 5[s], per cui [m/s] * [s]=[m]
La derivata di s(t) è s’(t)=v(t)=10 (una costante).
Essendo la velocità istantanea costante, per calcolare s si può usare l’espressione della velocità media, senza risolvere l’integrale:
$\Delta s = v \Delta t = 10*5 = 50$ m