1. Problemi a risposta multipla

Problema 1.1. Quante sono le coppie di numeri reali (x, y) che soddisfano entrambe le equazioni $x + y^2 = y^3$ e $y + x^2 = x^3$?

(A) 1 $\quad$ (B) 3 $\quad$ (C) 5 $\quad$ (D) 9 $\quad$ (E) Infinite

Problema 1.2. Dato un numero reale x, il simbolo $\lfloor x \rfloor$ indica la sua parte intera (cioè il più grande intero minore o uguale ad x) e $\{x\}$ la sua parte frazionaria (cioè $x - \lfloor x \rfloor$). Siano x, y, z tre numeri reali positivi che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3\lfloor x \rfloor - \{y\} + \{z\} = 20,3 \\ 3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor - \{x\} = 15,1 \\ \{y\} + \{z\} = 0,9 \end{cases}$$

Quanto vale $x + y + z$?

(A) 10, 8 $\quad$ (B) 11, 1 $\quad$ (C) 11, 6 $\quad$ (D) 12, 8 $\quad$ (E) 13

Problema 1.3. La sequenza dei numeri di Fibonacci $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ è tale che $F_1 = F_2 = 1$ e che l'n-esimo termine (con $n \geqslant 3$) sia la somma dei due precedenti (i primi termini della successione sono quindi $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2 = 1 + 1$, $F_4 = 3 = 2 + 1$, $F_5 = 5 = 3 + 2$). Quanti sono i numeri di Fibonacci che hanno esattamente 2016 cifre nella loro scrittura decimale?

(A) Almeno 2 e al massimo 3 $\quad$ (B) Almeno 4 e al massimo 5

(C) Almeno 6 e al massimo 7 $\quad$ (D) Almeno 8 e al massimo 9

(E) 10 o più

Problema 1.4. Alberto, Barbara e Ciro si ritrovano un giorno per preparare dei ravioli per una cena di beneficenza a favore delle olimpiadi di matematica. Come prima cosa decidono di ripartire equamente le ore di lavoro fra la mattina e il pomeriggio, e ovviamente lavorano contemporaneamente e per la stessa quantità di tempo. Alberto è molto affidabile: prepara 90 ravioli all'ora per tutta la giornata di lavoro. Barbara fa 110 ravioli all'ora durante la mattina, ma al pomeriggio è più distratta e prepara 70 ravioli all'ora. Ciro fa 2/3 dei suoi ravioli a un ritmo di 140 ravioli l'ora e l'ultimo terzo a soli 50 ravioli l'ora. Chi ha fatto più ravioli a fine giornata?

(A) Alberto. $\quad$ (B) Barbara. $\quad$ (C) Ciro.

(D) Alberto e Barbara, in ugual numero.

(E) Alberto e Ciro, in ugual numero.

Problema 1.5. Il quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari. Si sa inoltre che $AB = 100$, $BC = 120$, $CD = 75$. Determinare la lunghezza di AD.

$(A)\,30 \qquad (B)\,24\sqrt{2} \qquad (C)\,20\sqrt{3} \qquad (D)\,35 \qquad (E)\,\dfrac{125}{2}$

Problema 1.6. Siano a e b due numeri reali distinti. Si sa che le due equazioni $x^2 + ax + 3b = 0$ e $x^2 + bx + 3a = 0$ hanno una soluzione in comune: quali sono i possibili valori per la somma $a + b$?

(A) 0 o -3 $\qquad (B)$ 0 o 3 $\qquad (C)$ Soltanto 0 $\qquad (D)$ Soltanto -3

(E) Esistono infiniti valori possibili

Problema 1.7. È data una sequenza di 2019 numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2019}$. Si sa che scelti qualsiasi 4 termini consecutivi della sequenza, la loro somma è costante. Similmente, presi due numeri consecutivi, la loro differenza in valore assoluto è costante (cioè $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = |a_3 - a_4| = \ldots$). Si sa inoltre che $a_1 < a_2 < a_3$ e che $a_2 = 6$. Quanto vale la somma di tutti i numeri della sequenza?

$(A)\,2019 \qquad (B)\,2020 \qquad (C)\,4038 \qquad (D)\,12114$

(E) I dati non sono sufficienti per determinarlo

Problema 1.8. Se si taglia un foglio A4 precisamente a metà lungo una retta parallela al lato più corto, si creano due fogli che hanno la stessa forma di quello originale, cioè che si ottengono da esso tramite una rotazione e una riduzione di scala. Quest'anno diremo che un foglio rettangolare è "contemporaneo" se, tagliandolo in 2020 parti uguali ottenute con tagli paralleli al suo lato più corto, si ottengono 2020 rettangoli che hanno la stessa forma di quello iniziale. Se il lato corto di un foglio contemporaneo misura 1, quanto è lungo l'altro lato?

$(A)\,\sqrt{2020} \quad (B)\,2020^{3/2} \quad (C)\,\dfrac{2021}{2} \quad (D)\,2020 \quad (E)$ Nessuna delle precedenti

Problema 1.9. Anna, Bianca, Carla e Diana sono quattro donne di età (in anni) diverse. Le loro età sono numeri primi la cui somma è 240. Sapendo che nessuna di loro ha più di 70 anni, qual è l'età della più giovane?

$(A)\,47 \qquad (B)\,53 \qquad (C)\,57 \qquad (D)\,61 \qquad (E)\,67$

Problema 1.10. Quante sono le quaterne di interi positivi (a, b, x, y) tali che $x + y = a \cdot b$ e $a + b = x \cdot y$?

$(A)\,1 \qquad (B)\,5 \qquad (C)\,9 \qquad (D)\,17 \qquad (E)$ Infinite

Problema 1.11. I numeri reali $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{30}$ verificano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 20^3x_1 + 21^3x_2 + 22^3x_3 + \cdots + 49^3x_{30} = 13 \\ 21^3x_1 + 22^3x_2 + 23^3x_3 + \cdots + 50^3x_{30} = 1 \\ 22^3x_1 + 23^3x_2 + 24^3x_3 + \cdots + 51^3x_{30} = 19. \end{cases}$$

Quanto vale $21x_1 + 22x_2 + 23x_3 + \cdots + 50x_{30}$?

(A) Ci sono più valori accettabili (B) Il sistema non ha soluzione
(C) 1065 (D) 7 (E) 5

Problema 1.12. Nello studiare il polinomio $p(x) = x^2 + 2x - 6$, Enrica ha scoperto due numeri reali distinti α e β tali che $p(\alpha) = \beta$ e $p(\beta) = \alpha$. Quanto vale $\alpha + \beta$?

(A) -3 (B) $-2\sqrt{2}$ (C) 0 (D) 2 (E) 6

Problema 1.13. Per ogni reale non negativo x, definiamo $\lfloor x \rfloor$ come la parte intera di x, ovvero il più grande intero minore o uguale di x, e $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ come la parte frazionaria di x. Sia p una soluzione reale positiva **non** intera dell'equazione $\{z\lfloor z \rfloor\} = 2021\,\{z\}$. Qual è il **secondo** più piccolo valore possibile di $\lfloor p \rfloor$?

(A) 2021 (B) 2022 (C) 3033 (D) 4042 (E) 4043

2. Problemi a risposta numerica

Problema 2.1. Quante sono le coppie ordinate (x, y) di interi positivi minori o uguali a 2019 tali che $x + y$ e $xy + 1$ siano potenze di 2?

Problema 2.2. Quanti sono i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali, di grado compreso fra 1 e 2020 (estremi inclusi), per cui esiste un numero reale α tale che l'equazione $p(x)^2 = p(x^2) + \alpha p(x)$ sia verificata per ogni numero reale x.

3. Esercizi dimostrativi

Problema 3.1. Ambra costruisce una sequenza di numeri, a partire da numero reale positivo x_0, nel seguente modo: dato l'n–esimo termine x_n, il termine successivo è $x_{n+1} = \left\{1 - \frac{1}{x_n}\right\}$, dove $\{\alpha\}$ rappresenta la parte frazionaria di α, cioè la differenza fra α e il massimo numero intero minore o uguale di α. Non appena Ambra ottiene un termine uguale a 0, interrompe la sequenza.

(a) Dimostrare che se il numero di partenza x_0 è della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi, prima o poi la sequenza si interrompe.
(b) Dimostrare che, se la sequenza si interrompe, allora il punto di partenza x_0 era della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi.