

Metodi Matematici per l'ingegneria - a.a. 2021–2022

Trasformata Z - Esercizi

M. Miranda - D. Foschi

(versione aggiornata il 4 aprile 2022)

1 Z trasformate di segnali discreti

Esercizio 1.1. Calcola le Z trasformate delle successioni $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(B_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, definite da

$$A_k := 1, \quad B_k := k, \quad C_k := k^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Esercizio 1.2. Calcola le Z trasformate corrispondenti ai campionamenti con passo temporale $\tau > 0$ dei seguenti segnali causali:

$$f(t) := \sin t, \quad g(t) := \cos t, \quad h(t) := (\sin t)^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Esercizio 1.3. Calcola la Z trasformata delle seguenti successioni:

$$2^{-k}; \quad k2^{-k}; \quad e^{i\frac{\pi}{6}k}; \quad \frac{1}{k+1}; \quad k^2 \cos(k); \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Esercizio 1.4. Spiega perché la funzione $F(z) := 1/|z|$ non può essere la Z trasformata di un segnale discreto.

Esercizio 1.5. Calcola la Z trasformata delle seguenti sequenze numeriche (si intende che il primo valore è quello con indice 0):

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

$$1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots$$

$$1, 0, 0, 2, 0, 0, 4, 0, 0, 8, 0, 0, 16, 0, 0, 32, 0, 0, 64, \dots$$

2 Convoluzioni discrete

Esercizio 2.1. Sia $\delta_j := (\delta_{j,k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ la successione Delta centrata in j , con $\delta_{j,j} = 1$ e $\delta_{j,k} = 0$ quando $k \neq j$. Calcola la convoluzione $\delta_3 * \delta_5$.

Esercizio 2.2. Calcola le Z trasformate delle convoluzioni $(A_k) * (B_k)$, $(A_k) * (C_k)$, $(B_k) * (C_k)$, per le successioni A_k , B_k e C_k definite nell'esercizio 1.1.

3 Ricostruzione di segnali discreti dalla loro trasformata

Esercizio 3.1. Determina le successioni le cui Z trasformate sono date da:

$$F(z) = \frac{1+z^2}{(1+z)(2+z)}, \quad G(z) = \frac{z}{z^2-3z+1}, \quad H(z) = \frac{2z^3+z^2-z+4}{z(z-2)^3}.$$

4 Trasformate di successioni definite per ricorrenza

Esercizio 4.1. Utilizzando la Z trasformata, determina le successioni $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(d_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, definite dalle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k; \end{cases} \begin{cases} b_0 = 0, \\ b_1 = 1, \\ b_{k+2} = b_k - 2b_{k+1}; \end{cases} \begin{cases} c_0 = 0, \\ c_1 = 2, \\ c_{k+2} = -c_k; \end{cases} \begin{cases} d_0 = 0, \\ d_1 = 0, \\ d_{k+2} + 2d_{k+1} + 3d_k = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.2. Siano $A, B \in \mathbb{C}$. Sia $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ una successione a valori in \mathbb{C} . Sia $(\delta_{0,k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ la successione Delta centrata in 0, con $\delta_{0,0} = 1$ e $\delta_{0,k} = 0$ per ogni $k > 0$. Verifica che se la successione $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} y_{k+2} + Ay_{k+1} + By_k = \delta_{0,k}, \\ y_0 = y_1 = 0, \end{cases}$$

allora la convoluzione $(x_k) := (b_k) * (y_k)$ risolve il problema

$$\begin{cases} x_{k+2} + Ax_{k+1} + Bx_k = b_k, \\ x_0 = x_1 = 0. \end{cases}$$

5 Discretizzazioni di equazioni differenziali

Esercizio 5.1. Discretizza i seguenti problemi di Cauchy e trova delle soluzioni approssimate mediante l'uso della Z trasformata:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \begin{cases} y''(t) + 4y(t) = e^{-2t}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \begin{cases} y''(t) - 4y(t) = e^{-2t}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

6 Domande che possono essere chieste all'esame

Ecco un elenco di domande alle quali dovresti essere in grado di rispondere dopo aver studiato gli argomenti svolti a lezione e dopo aver provato a fare gli esercizi proposti. Usa questo elenco come ausilio per prepararti all'esame.

- Che cosa è un segnale causale discreto?
- Come si definisce la Z trasformata di un segnale discreto?
- Quali sono le principali proprietà della Z trasformata?
- Che proprietà ha la Z trasformata di un segnale discreto periodico?
- Come si definisce la convoluzione di segnali causali discreti e come agisce la Z trasformata su convoluzioni?
- Come posso ricostruire un segnale dalla sua Z trasformata?
- Come posso ottenere la Z trasformata di una successione definita per ricorrenza?
- Come posso discretizzare un'equazione differenziale?
- Come posso approssimare soluzioni di E.D.O. lineari a coefficienti costanti utilizzando la Z trasformata?