

Metodi Matematici per l'ingegneria - a.a. 2021–2022

Trasformata di Laplace - Esercizi

M. Miranda - D. Foschi

(versione aggiornata il 10 maggio 2022)

1 Calcolo di trasformate di Laplace

Esercizio 1.1. Determina la trasformata di Laplace, e la corrispondente ascissa di convergenza, per ciascuno dei seguenti segnali causali:

$$\begin{array}{cccc} \cos(2t), & \sin(3t), & (\cos t)^2, & (\sin t)^3, \\ \cos(t)\chi_{[0,\pi/2]}(x), & \sin(t)\chi_{[0,\pi]}(x), & (\cos t)^2\chi_{[0,\pi/2]}(x), & (\sin t)^3\chi_{[0,\pi]}(x). \end{array}$$

Esercizio 1.2. Determina la trasformata di Laplace dei segnali causali (positivamente) periodici con periodo 1, qui di seguito definiti sul loro primo periodo:

- Onda quadra: $Q(x) = 1$ se $x \in [0, 1/2[$ e $Q(x) = 0$ se $x \in [1/2, 1[$;
- Onda triangolare: $T(x) = x$ se $x \in [0, 1/2[$ e $Q(x) = 1 - x$ se $x \in [1/2, 1[$;
- Onda a dente di sega: $S(x) = x$ se $x \in [0, 1[$.

Per ciascun segnale calcola inoltre i residui della trasformata nei punti singolari lungo l'asse immaginario.

Esercizio 1.3. Verifica che il segnale causale $\text{sinc}(t)$ è \mathcal{L} -trasformabile e determina la sua trasformata di Laplace.

Esercizio 1.4. Verifica che il segnale causale $1/\sqrt{t}$ è \mathcal{L} -trasformabile e determina la sua trasformata di Laplace.

Esercizio 1.5. Senza calcolare integrali, ma usando proprietà note della trasformata di Laplace, determina le trasformate dei seguenti segnali causali:

$$2(1 + t^2)e^{5t}; \quad 4t + 3e^{-t} \sin(2t); \quad t^3 e^t \cos(t).$$

2 Calcolo di antitrasformate

Esercizio 2.1. Verifica la validità della formula di inversione per la trasformata di Laplace per il segnale gradino di Heaviside calcolando gli integrali corrispondenti con il metodo dei residui.

Esercizio 2.2. Calcola l'antitrasformata di Laplace per le seguenti funzioni razionali:

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{z^2}; & \frac{1}{z+2-\sqrt{3}i}; & \frac{1}{4z^2-1}; \\ \frac{1}{4z^2+1}; & \frac{z+1}{z^2+z+1}; & \frac{z^2+z+1}{z^4+1}; \\ \frac{z^2-z-1}{z^4-1}; & \frac{z^3}{(z+1)^2(z^2+4)}; & \frac{z^3}{(z^2+4)^2}. \end{array}$$

3 Risoluzione di problemi di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti

Esercizio 3.1. Utilizzando la trasformata di Laplace determinare la soluzione $y(t)$ dei seguenti problemi di Cauchy per equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} y' + y = e^{-t}, & t > 0, \\ y(0) = 0; \end{cases} & \begin{cases} y' + y = e^{-t}\chi_{[1,+\infty[}(t), & t > 0, \\ y(0) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0, & t > 0, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 1; \end{cases} & \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0, & t > 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -4; \end{cases} \\ \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = \sin(3t)e^{-t}, & t > 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -4; \end{cases} & \begin{cases} y'' + y = t, & t > 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y'' + y = t, & t > 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1; \end{cases} & \begin{cases} y''' - 3y' + 2y = e^t, & t > 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0. \end{cases} \end{array}$$

Esercizio 3.2. Determina un segnale causale $y(t)$ che soddisfi la seguente equazione integrale,

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-s)y(s) ds,$$

dove $K(t) := e^{-t}H(t)$ e $f(t) := te^{-t}H(t)$, con $H(t) := \chi_{[0,+\infty[}(t)$ funzione gradino di Heaviside. [Per trasformare l'equazione integrale in una equazione algebrica usa la formula della trasformata della convoluzione.]

4 Domande che possono essere chieste all'esame

Ecco un elenco di domande alle quali dovresti essere in grado di rispondere dopo aver studiato gli argomenti svolti a lezione e dopo aver provato a fare gli esercizi proposti. Usa questo elenco come ausilio per prepararti all'esame.

- Come si definisce la trasformata di Laplace di un segnale causale?
- Quali ipotesi sul segnale garantiscono che la trasformata di Laplace sia ben definita?
- Che cosa è e come si definisce l'ascissa di convergenza di un segnale?
- Fai alcuni esempi di calcolo di trasformate di Laplace.
- Cosa puoi dire della trasformata di Laplace di segnali a supporto compatto, o di segnali periodici?
- Come si dimostra l'olomorfia della trasformata di Laplace?
- Quali sono le principali proprietà della trasformata di Laplace?
- Cosa puoi dire della trasformata di derivate e di convoluzioni?
- Come si può ricostruire un segnale causale a partire dalla sua trasformata?
- Come si può antitrasformare una funzione razionale?
- Come si possono trovare soluzioni a E.D.O. lineari a coefficienti costanti utilizzando la trasformata di Laplace?