

Metodi Matematici per l'ingegneria - a.a. 2021–2022

# Trasformata di Fourier - Esercizi

M. Miranda - D. Foschi

(versione aggiornata il 6 giugno 2022)

Indichiamo con  $H(x) = \chi_{[0,+\infty[}(x)$  la funzione gradino di Heaviside. Indichiamo con  $(x)_+ = \max\{x, 0\}$  la parte positiva del numero reale  $x$ .

## 1 Calcolo di trasformate di funzioni $L^1$

**Esercizio 1.1.** Calcola la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= (1 - |x|)_+, & f_2(x) &:= (1 - x^2)_+, & f_3(x) &:= \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[-1,0]}(x), \\ f_4(x) &:= e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x), & f_5(x) &:= x \operatorname{rect}(x), & f_6(x) &:= \sin(x) \chi_{[-\pi,\pi]}(x), \\ f_7(x) &:= \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}, & f_8(x) &:= (x - 2)H(x) e^{-3x}, & f_9(x) &:= xH(x - 2) e^{-3(x-2)}, \\ f_{10}(x) &:= (-2 - x)H(-x) e^{3x}, & f_{11}(x) &:= 2x e^{-3x^2}, & f_{12}(x) &:= \sin(2x) e^{-3x^2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 1.2.** Calcola la trasformata di Fourier della densità di probabilità  $p(x)$  per la distribuzione normale con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ ,

$$p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

**Esercizio 1.3.** Calcola l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\pi x) e^{-\pi x^2} dx.$$

[Se esprimi il coseno, tramite le identità di Eulero, in termini di esponenziali complessi, puoi ricondurre l'integrale ad una combinazione di valori della trasformata di Fourier della funzione Gaussiana.]

**Esercizio 1.4.** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  calcola la trasformata di Fourier della funzione  $t^n e^{-|t|}$ .

**Esercizio 1.5.** Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che  $a > 0$  e  $b^2 < 4ac$ . Determina la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) := \frac{1}{at^2 + bt + c}.$$

**Esercizio 1.6.** Calcola le trasformate di Fourier delle funzioni

$$\frac{1}{1+t^4}, \quad \frac{t}{(4+t^2)^2}, \quad \frac{(\sin(3t))^2}{t^2+2t+2}.$$

## 2 Risoluzione di equazioni differenziali con la trasformata di Fourier

**Esercizio 2.1.** Determina la trasformata di Fourier di una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R})$  sapendo che essa è soluzione dell'equazione differenziale

$$f''(x) - 2f(x) = e^{-|x-1|}.$$

**Esercizio 2.2.** Spiega perché non esistono soluzioni in  $L^1(\mathbb{R})$  dell'equazione differenziale

$$f''(x) + 2f(x) = e^{-|x-1|}.$$

## 3 Segnali a banda limitata

**Esercizio 3.1.** Considera i seguenti segnali

$$g(t) := \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2, \quad h(t) := \cos(4t)g(t).$$

Verifica che si tratta di segnali a banda limitata e spiega perché la loro convoluzione è identicamente nulla.

**Esercizio 3.2.** Sia  $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$  un segnale a banda limitata con limite di banda  $\Omega > 0$ . Considera i due segnali  $g(t)$  e  $h(t)$  definiti su tutto  $\mathbb{R}$  da

$$g(t) := \cos(2\Omega t)f(t), \quad h(t) := \sin(2\Omega t)f(t).$$

- Determina il legame tra le trasformate di Fourier di  $f$ ,  $g$  e  $h$ .
- Spiega perché le convoluzioni  $f * g$  e  $f * h$  sono identicamente nulle.
- Cosa puoi dire della convoluzione  $g * h$ ?

## 4 Domande che possono essere chieste all'esame

Ecco un elenco di domande alle quali dovresti essere in grado di rispondere dopo aver studiato gli argomenti svolti a lezione e dopo aver provato a fare gli esercizi proposti. Usa questo elenco come ausilio per prepararti all'esame.

- Come si definisce la trasformata di Fourier di una funzione integrabile?
- Fai alcuni esempi di calcolo di trasformate di Fourier?
- Come si trasforma la trasformata di Fourier sotto l'azione di semplici simmetrie o di semplici trasformazioni elementari?
- Come agisce la trasformata di Fourier su prodotti di convoluzione?
- Come e quando si può calcolare la derivata di una trasformata di Fourier?
- Come e quando si può calcolare la trasformata di Fourier di una derivata?
- Che legame c'è tra regolarità di una funzione e proprietà di decadimento all'infinito della sua trasformata di Fourier?
- Che legame c'è tra decadimento all'infinito di una funzione e regolarità della sua trasformata di Fourier?
- Quando è possibile, cosa si ottiene applicando due volte la trasformata di Fourier?
- Come si dimostra la formula di inversione per la trasformata di Fourier?
- Come si dimostra la formula di inversione per la trasformata di Laplace?
- Perché non è possibile che una funzione non nulla a supporto limitato abbia trasformata di Fourier con supporto limitato?
- Che cosa sono le funzioni di Schwartz?
- Perché la trasformata di Fourier è una biezione sullo spazio delle funzioni di Schwartz?
- Cosa dicono le identità di Parseval e di Plancherel?
- Cosa significa che la trasformata di Fourier agisce come una isometria rispetto alla norma  $L^2$  sullo spazio delle funzioni di Schwartz.
- Cosa significa e come si dimostra che le funzioni di Schwartz sono dense in  $L^2$ ?
- Come si definisce la trasformata di Fourier di funzioni  $L^2$ ?
- Sai fare un esempio di una funzione che sta in  $L^2$  ma non sta in  $L^1$  di cui sai calcolare la trasformata di Fourier?
- Che cosa si intende con segnale a banda limitata?
- Cosa dice il teorema del campionamento di Shannon-Whittaker?