**Metodi Matematici per l'ingegneria - a.a. 2021–2022**

# Integale di Lebesgue - Esercizi

M. Miranda - D. Foschi

(versione aggiornata il 22 aprile 2022)

## 1 Teoremi di convergenza per l'integrale di Lebesgue

*Esercizio* 1.1. Considera la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n, & \text{se } |x| \leqslant \sqrt{n}, \\ 0, & \text{se } |x| > \sqrt{n}. \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

- Verifica che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona non decrescente. *[Può essere utile la disuguaglianza di Bernoulli.]*
- Calcola il limite puntuale $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Verifica che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Beppo Levi.
- Calcola il limite della successione degli integrali $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

*Esercizio* 1.2. Verifica se è possibile applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e, in caso affermativo, determina una funzione integrabile che domina uniformemente rispetto ad $n$ la successione delle funzioni integrande e poi calcola il limite della successioni di integrali

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n^2 x)}{1 + nx^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/n}}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2 \sqrt{x} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} n^2 \sqrt{x} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x.$$

## 2 Integrali doppi

*Esercizio* 2.1. Considera la seguente funzione di due variabili

$$f(x,y) := \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$

definita per $x, y \in \mathbb{R}$.

- Per ogni $x \in \mathbb{R}$ calcola l'integrale $A(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.
- Per ogni $y \in \mathbb{R}$ calcola l'integrale $B(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.
- Calcola l'integrale $C = \int_{-\infty}^{\infty} A(x)\,\mathrm{d}x$.
- Calcola l'integrale $D = \int_{-\infty}^{\infty} B(y)\,\mathrm{d}y$.
- Discuti i risultati mettendoli in relazione con i teoremi sullo scambio dell'ordine di integrazione di Tonelli e di Fubini.

*Esercizio* 2.2. Considera la seguente funzione di due variabili

$$f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definita per $x, y \in ]0,1[$.

- Per ogni $x \in ]0,1[$ calcola l'integrale $A(x) := \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$. *[Prima di fare il calcolo dell'integrale prova a calcolare la derivata rispetto ad $x$ di $x/(x^2+y^2)$.]*
- Per ogni $y \in ]0,1[$ calcola l'integrale $B(y) := \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$.
- Calcola l'integrale $C = \int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x$.
- Calcola l'integrale $D = \int_0^1 B(y)\,\mathrm{d}y$.
- Confronta i valori di $C$ e $D$ e mettili in relazione con i teoremi sullo scambio dell'ordine di integrazione di Tonelli e di Fubini.

*Esercizio* 2.3. Sia $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ il primo quadrante del piano cartesiano. Calcola il valore dell'integrale

$$\iint_Q \frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

## 3 Spazi $L^p$

*Esercizio* 3.1. Si verifichi che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \mathrm{d}x$$

è divergente e dunque la funzione $\frac{\sin x}{x}$ non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, mentre l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

è convergente e se ne calcoli il valore (con il metodo dei residui).

*Esercizio* 3.2. Per ogni $p > 0$ calcola il valore della norma $L^p$ per la funzione gaussiana $\mathrm{e}^{-x^2}$ definita per $x \in \mathbb{R}$.

*Esercizio* 3.3. Considera la funzione $f(x) := x^{-\alpha} |\log x|^{-\beta}$ definita per $x \in [2, +\infty[$. Determina per quali $p, \alpha, \beta > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p([2, +\infty[)$.

*Esercizio* 3.4. Sia $\alpha > 0$. Sia $g(x) = |f(x)|^\alpha$. Verifica che $f \in \mathcal{L}^p$ se e solo se $g \in \mathcal{L}^{p/\alpha}$ e determina il legame che intercorre tra $\|f\|_p$ e $\|g\|_{p/\alpha}$.

*Esercizio* 3.5. Depermina per quali $p > 0$ ciascuna delle seguenti funzioni appartiene a $L^p(\mathbb{R})$:

$$f_1(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1 + |x|}, \quad f_3(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{|x|}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}\left(1 + \sqrt[3]{|x|}\right)}.$$

*Esercizio* 3.6. Determina per quali valori reali di $\alpha$ e $\beta$ si ha che la funzione

$$f(x) := \frac{\sin x}{|x^2 - 1|^\alpha |x|^\beta}$$

appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.

*Esercizio* 3.7. Considera la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log(1+x)}}$.

- Determina per quali $p > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p(]0, 1])$.
- Determina per quali $p > 0$ si ha che $f \in \mathcal{L}^p([1, +\infty[)$.

## 4 Convoluzioni

*Esercizio* 4.1. Indichiamo con $\chi_I$ la funzione caratteristica di un intervallo $I$: che vale $\chi_I(x) = 1$ quando $x \in I$ e $\chi_I(x) = 0$ quando $x \notin I$.

1. Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,+\infty[} * \chi_{[c,+\infty[}$ di due funzioni caratteristiche di due intervalli illimitati a destra.

2. Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,+\infty[}$ delle funzioni caratteristiche di un intervallo limitato e di un intervallo illimitato a destra.

3. Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,b]} * \chi_{[a,b]}$ di una funzione caratteristica di un intervallo con se stessa.

4. Descrivi come è fatto il grafico della convoluzione $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ di due funzioni caratteristiche di due intervalli limitati generici.

*Esercizio* 4.2. Per ogni $\mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$ considera la funzione gaussiana

$$\gamma_{\mu,\lambda}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda(x-\mu)^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Verifica che la convoluzione di due gaussiane è un multiplo di una gaussiana,

$$\gamma_{\mu_1,\lambda_1} * \gamma_{\mu_2,\lambda_2} = C\gamma_{\mu_3,\lambda_3},$$

e determina delle formule per calcolare $C$, $\mu_3$, $\lambda_3$ in funzione di $\mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2$.

*Esercizio* 4.3. Indichiamo con $H(x)$ la funzione gradino di Heaviside, che vale $H(x) = 1$ per $x \geqslant 0$ e $H(x) = 0$ per $x < 0$. Indichiamo con $(a)_+ := \max\{a, 0\}$ la parte positiva del numero $a$. Calcola la convoluzione $f * g$ per le seguenti coppie di funzioni

1. $f(x) = (1 - |x|)_+, \quad g(x) = \chi_{[1,2]}(x);$
2. $f(x) = g(x) = (1 - |x|)_+;$
3. $f(x) = g(x) = \mathrm{e}^{-x}H(x);$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}H(x), \quad g(x) = \mathrm{e}^{x}H(-x);$
5. $f(x) = g(x) = \mathrm{e}^{-|x|};$
6. $f(x) = H(x), \quad g(x) = \mathrm{e}^{-|x|};$
7. $f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \mathrm{e}^{-|x|};$
8. $f(x) = xH(x), \quad g(x) = \sin(x)H(x).$

*Esercizio* 4.4. Sia $H(x) = \chi_{[0,+\infty[}(x)$ la funzione gradino di Heaviside. Definiamo la successione di funzioni $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in modo ricorsivo ponendo $E_1 = H$ e $E_{n+1} = H * E_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Calcola esplicitamente $E_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Calcola il limite $\lim_{n\to\infty} E_n(x)$.
- Determina la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} E_n(x)$.

*Esercizio* 4.5. Dimostra che dalla convoluzione tra un polinomio e una funzione continua a supporto compatto si ottiene ancora un polinomio.

## 5 Domande che possono essere chieste all'esame

Ecco un elenco di domande alle quali dovresti essere in grado di rispondere dopo aver studiato gli argomenti svolti a lezione e dopo aver provato a fare gli esercizi proposti. Usa questo elenco come ausilio per prepararti all'esame.

- Cosa dice il teorema di Beppo Levi della convergenza monotona per l'integrale di Lebesgue?
- Cosa dice e come si dimostra il lemma di Fatou per l'integrale di Lebesgue?
- Cosa dice e come si dimostra il teorema della convergenza dominata di Lebesgue?
- Sotto quali ipotesi è possibile effettuare lo scambio nell'ordine di integrazine in un integrale doppio?
- Puoi fare un esempio di integrale doppio in cui scambiando l'ordine di integrazione cambia il risultato dell'integrale?
- Cosa significa che una proprietà è valida quasi ovuque?
- Come si definiscono gli spazi $L^p$?
- Come si definisce la norma $L^p$?
- Che cosa significa che una funzione è localmente integrabile?
- Sai fare un esempio di funzione che è localmente integrabile su $\mathbb{R}$ e che non appartiene ad alcun spazio $L^p(\mathbb{R})$?
- Cosa significa che una successione di funzioni converge in norma $L^p$?
- Cosa significa che lo spazio delle funzioni continue è denso in $L^p$, e per quali $p$ è vero?
- In cosa consiste la continuità della norma $L^p(\mathbb{R})$ rispetto alle traslazioni?
- Come si definisce il prodotto di convoluzioni di due funzioni definite su $\mathbb{R}$?
- Quali stime di tipo $L^p$ sono valide per convoluzioni?
- Cosa puoi dire della regolarità di un prodotto di convoluzione?
- Come si possono usare convoluzioni per ottenere approssimazioni in norma $L^p$?
- Come si possono ottenere approssimazioni di funzioni $L^p$ con funzioni $C^\infty$ a supporto compatto?