UNIFE - Corso di laurea in Ingegneria Elettronica

Metodi Matematici per l'ingegneria - a.a. 2021–2022

Funzioni complesse di variabile complessa - Esercizi

M. Miranda - D. Foschi

(versione aggiornata il 22 marzo 2022)

1 Numeri complessi

Gli esercizi di questa sezione servono come ripasso di quanto è stato già svolto sull'algebra e geometria dei numeri complessi durante l'insegnamento di Analisi Matematica 1b.

Esercizio 1.1. Determina tutti i numeri complessi che sono uguali al complesso coniugato del proprio quadrato e rappresentali graficamente nel piano complesso.

Esercizio 1.2. Determina l'insieme delle soluzioni complesse per ciascuna delle seguenti equazioni e disegna la loro posizione nel piano complesso:

$$
\begin{aligned}
&z^2 - 2\mathrm{i}z + 1 = 0, && z - \frac{1}{z} = \mathrm{i}, \\
&\frac{1-z}{\mathrm{i}+z} = \frac{2z}{1-\mathrm{i}z}, && z^4 + z^2 + 1 = 0, \\
&z^8 - 16 = 0, && z^8 + 16 = 0.
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.3. Determina per quali $z \in \mathbb{C}$ sono soddisfatte ciascuna delle seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z^2) &= \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2, \\
\mathrm{Im}(z^2) &= \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2, \\
\overline{z^2} &= \overline{z}^2, \\
\left|z^2\right| &= |z|^2, \\
\mathrm{Arg}(z^2) &= \big(\mathrm{Arg}(z)\big)^2.
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.4. Sfruttando la formula per la somma dei termini di una progressione geometrica ricava una formula sintetica per calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, i cosidetti *nuclei di Dirichlet* $D_n(\theta)$ definiti da

$$D_n(\theta) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}.$$

Verifica che le funzioni $D_n(\theta)$ assumono sempre valori reali e prova a studiarne il grafico al variare di $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Esercizio 1.5. Tra tutte le infinite soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{e}^{z-\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z-\pi}$$

determina e rappresenta graficamente nel piano complesso quelle con modulo minore di 3π.

2 Funzioni di variabile complessa

Esercizio 2.1. Per ciascuna delle seguenti funzioni $f(z)$ della variabile complessa $z = x + \mathrm{i}y$ determina esplicitamente la parte reale $u(x, y)$ e la parte immaginaria $v(x, y)$ come funzioni delle due variabili reali x e y, in modo da avere $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$.

$$f_1(z) := z^3; \qquad f_2(z) := \frac{1}{\mathrm{i} - z};$$
$$f_3(z) := \mathrm{e}^{(z^2)}; \qquad f_4(z) := \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Esercizio 2.2. Verifica che la funzione

$$f(z) = \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

è invertibile se ristretta al dominio $S := \left\{z \in \mathbb{C}\colon -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$. Determina l'immagine $f(S)$ e determina esplicitamente la sua funzione inversa $g(z) =: \mathrm{Arctan}(z)$ definita sul dominio $f(S)$.

Esercizio 2.3. Considera le seguenti funzioni definite nel piano $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Verifica che si tratta di funzioni armoniche, determina per ciascuna di esse una funzione armonica coniugata e cerca di determinare a quale funzione olomorfa corrisponda la coppia di funzioni armoniche coniugate.

$$u_1(x, y) := x^2 - y^2; \qquad u_2(x, y) := (2x + 1)y;$$
$$u_3(x, y) := x^3 - 3xy^2; \qquad u_4(x, y) := \mathrm{e}^x\,(x \cos y - y \sin y)\,.$$

[Prima di fare questo esercizio, è utile ripassare quello che è stato fatto durante l'insegnamento di Analisi Matematica 2 a riguardo del calcolo del potenziale di un campo vettoriale conservativo (o di una forma differenziale esatta).]

3 Integrali curvilinei nel piano complesso

Esercizio 3.1. Calcola l'integrale $\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$ dove γ è il cammino chiuso orientato in senso antiorario che descrive il perimetro del triangolo ABC nel piano complesso con vertici nei punti $A = 0$, $B = 1$ e $C = \mathrm{i}$.

Esercizio 3.2. Sia C_R la circonferenza con centro nell'origine e raggio $R > 0$. Facendo opportune stime, verifica che l'integrale

$$\int_{C_R} \frac{\mathrm{Log}(z^2)}{z^2}\,\mathrm{d}z$$

è infinitesimo per $R \to +\infty$. [Con $\mathrm{Log}(\cdot)$ indichiamo la funzione *logaritmo principale* la cui parte immaginaria assume valori in $]-\pi, \pi]$.]

Esercizio 3.3. Calcola l'integrale $\int_\Gamma \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z$ dove Γ è uno dei seguenti cammini che collega il punto $A = -4$ con il punto $D = 4$ nel piano complesso:

1. Γ = cammino formato dai segmenti rettilinei che collegano in sequenza i punti $A = -4$, $B = -4 - 4\mathrm{i}$, $C = 4 - 4\mathrm{i}$, $D = 4$;
2. Γ = semicerchio nel semipiano con parte immaginaria positiva con raggio 4 e centro nell'origine.

Cosa puoi dedurre dal fatto che i due valori ottenuti sono diversi?

Esercizio 3.4. Utilizzando la formula integrale di Cauchy determina il valore dei seguenti integrali

$$\int_\Gamma \frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z, \qquad \int_\Gamma \frac{\cosh z}{z^2+z}\,\mathrm{d}z, \qquad \int_\Gamma \frac{\tan(z/2)}{2z-\pi}\,\mathrm{d}z,$$

dove Γ descrive in senso antiorario il perimetro del quadrato nel piano complesso i cui lati giacciono sulle rette $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$.

4 Singolarità e residui

Esercizio 4.1. Determina e classifica le singolarità isolate delle seguenti funzioni olomorfe, e calcola inoltre il valore del residuo in ciascun punto di singolarità:

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2-1}, \qquad f_2(z) := \frac{1}{\mathrm{e}^z - 1}, \qquad f_3(z) := \frac{1}{z^3(1-z^2)},$$

$$f_4(z) := \frac{1}{z^2+8z+1}, \qquad f_5(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^4+z^2+1}, \qquad f_6(z) := \frac{z\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^{4z}-1},$$

$$f_7(z) := \frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}}{z^4-1}, \qquad f_8(z) := \frac{z^2\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^2}, \qquad f_9(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(\sinh z)^2},$$

$$f_{10}(z) := \frac{z(z^2+4\pi^2)}{1-\cosh z}, \qquad f_{11}(z) := \mathrm{e}^{\frac{2}{z}}, \qquad f_{13}(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)},$$

$$f_{14}(z) := \frac{z\cos(z)}{\sin(z)}, \qquad f_{15}(z) := z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_{16}(z) := \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{i}\mathrm{e}^z}.$$

5 Sviluppi in serie di Laurent

Esercizio 5.1. Determina lo sviluppo di Laurent delle seguenti funzioni intorno al punto $z_\star$ indicato:

$$f_1(z) := \frac{1}{(z-2)(z-5)^2}, \quad z_\star = 2; \qquad f_1(z) := \frac{1}{(z-2)(z-5)^2}, \quad z_\star = 5;$$
$$f_2(z) := z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}, \quad z_\star = 0; \qquad f_3(z) := \frac{1}{z^3(1-z^2)}, \quad z_\star = 0;$$
$$f_4(z) := \frac{1}{z^4+1}, \quad z_\star = 1; \qquad f_4(z) := \frac{1}{z^4+1}, \quad z_\star = \mathrm{i}.$$

Esercizio 5.2. Decomponi le seguenti funzioni razionali come somma di frazioni semplici:

$$f_1(z) := \frac{1}{z^2+8z+1}, \qquad f_2(z) := \frac{z^3+4}{z^2(z-1)^4}, \qquad f_3(z) := \frac{z}{z^3+8},$$
$$f_4(z) := \frac{1}{z^5(z^2+1)^3}, \qquad f_5(z) := \frac{z}{z^2+z-6}, \qquad f_6(z) := \frac{z^2}{(z^2+z-6)^2}.$$

6 Calcolo di integrali con il metodo dei residui

Esercizio 6.1. Utilizzando il metodo dei residui calcola il valore dei seguenti integrali su cammini chiusi (che si intendono orientati positivamente)

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+8z+1}\,\mathrm{d}z, \qquad \int_{|z-2\mathrm{i}|=8} \frac{z(z^2+4\pi^2)}{1-\cosh z}\,\mathrm{d}z, \qquad \int_{|z|=1} z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z.$$

Esercizio 6.2. Calcola il valore dei seguenti integrali, applicando il metodo dei residui ad opportune funzioni olomorfe integrate lungo opportuni cammini chiusi e spiegando i vari passi del procedimento:

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x-2}{x^4+10x^2+9}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+4x^2+3}\,\mathrm{d}x.$$

   Si tratta di integrali di funzioni razionali in cui il denominatore non si annulla mai sull'asse reale e all'infinito decadono come $1/x^2$. Prova a integrare tali funzioni razionali nel piano complesso lungo la frontiera del semicerchio con diametro $[-R, R]$ sull'asse reale e contenuto nel semipiano superiore del piano complesso. Facendo tendere $R \to +\infty$ dovresti ottenere facilmente gli integrali richiesti.

2. $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+\cos t}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Osserva che $\cos t = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ e $\sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z + z^{-1})$ quando $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

3. Integrali di Fresnel:

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Osserva che $\cos(x^2) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\big)$ e $\sin(x^2) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\big)$; prova quindi ad integrare $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ lungo la frontiera del settore circolare Ω_R definito da

$$\Omega_R := \left\{ z\colon\ |z| \leqslant R,\, 0 < \mathrm{Arg}(z) < \frac{\pi}{4} \right\};$$

facendo tendere $R \to +\infty$ il contributo dell'integrale lungo l'arco di circonferenza dovrebbe risultare infinitesimo e dal contributo degli integrali lungo i due raggi dovresti ottenere un legame tra gli integrali da calcolare e l'integrale della funzione Gaussiana $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

4. $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Prova a integrare la funzione $1/(1+z^n)$ lungo la frontiera del settore circolare Ω_R definito da

$$\Omega_R := \left\{ z\colon\ |z| \leqslant R,\, 0 < \mathrm{Arg}(z) < \frac{2\pi}{n} \right\};$$

facendo tendere $R \to +\infty$ il contributo dell'integrale lungo l'arco di circonferenza dovrebbe risultare infinitesimo e dal contributo degli integrali lungo i due raggi dovresti ottenere un espressione da cui ricavare l'integrale da calcolare.

5. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Sfruttando la periodicità della funzione esponenziale in campo compelsso, prova a integrale la funzione $\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}z}}{1+e^z}$ lungo la frontiera del rettangolo $[-R, R] \times [0, 2\pi]$ nel piano complesso; facendo tendere $R \to +\infty$ il contributo degli integrali lungo i lati verticali dovrebbero risultare infinitesimi e dal contributo degli integrali lungo i lati orizzontali dovresti ottenere un espressione da cui ricavare l'integrale da calcolare.

Esercizio 6.3. Calcola il *valore principale* del seguente integrale

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t+1}{(t-2)(2t^2-4t+4)}\,\mathrm{d}t.$$

Esercizio 6.4. Sempre applicando il metodo dei residui calcola il valore dei seguenti integrali:

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^2 \, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+(\sin x)^2} \, \mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{8+x^3} \, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x}{8+x^3} \, \mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2-1} \, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{t^2+\beta^2} \, \mathrm{d}t, \qquad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}}{\sinh t} \, \mathrm{d}t.$$

7 Domande che possono essere chieste all'esame

Ecco un elenco di domande alle quali dovresti essere in grado di rispondere dopo aver studiato gli argomenti svolti a lezione e dopo aver provato a fare gli esercizi proposti. Usa questo elenco come ausilio per prepararti all'esame.

- Come si definisce la derivata complessa di una funzione di variabile complessa e che legame ha con le derivate (parziali) reali?
- Che cosa sono le equazioni di Cauchy Riemann e come si ottengono?
- Sai fare esempi di funzioni di variabile complessa che sono derivabili in senso reale ma non in senso complesso?
- Che cosa è una funzione olomorfa?
- Come si verifica l'olomorfia di funzioni razionali, della funzione esponenziale, del logaritmo principale, delle funzioni trigonometriche?
- Come è fatto il dominio di convergenza di una serie di potenze?
- Come si dimostra l'olomorfia di una serie di potenze?
- Come si definiscono integrali curvilinei nel piano complesso di funzioni di variabile complessa?
- Che proprietà hanno gli integrali curvilinei di funzioni olomorfe?
- Che cosa è una funzione analitica?
- Che relazione c'è tra olomorfia e analiticità?
- Cosa possiamo dire degli zeri di una funzione olomorfa?
- Che cosa è un prolungamento analitico?

- Che cosa è una funzione intera?
- Cosa dice il teorema di Liouville e quali sono alcune sue applicazioni?
- Come si classificano le singolarità isolate di una funzione olomorfa?
- Che cosa è il residuo di una singolarità isolata?
- Come si possono utilizzare i residui per calcolare integrali?
- Che cosa è una serie di Laurent?
- Come si possono determinare i coefficienti della serie di Laurent di una funzione olomorfa?
- Come si può ottenere la decomposizione in frazioni semplici di una funzione razionale?